Théorie des graphes

Journées scientifiques des jeunes chercheur·euse·s du CERMICS

Hélène Langlois

03/11/2022

Définition

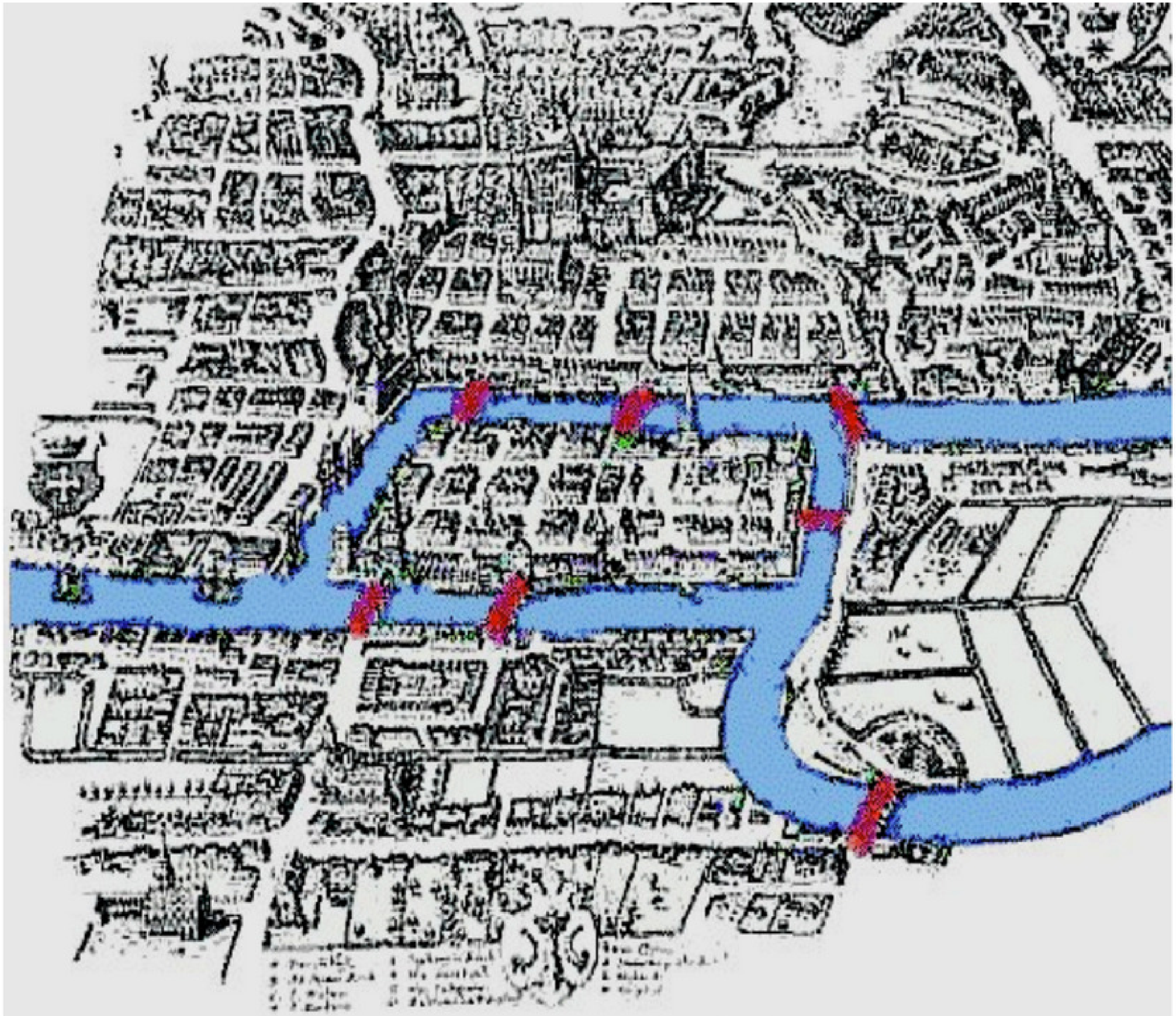
Un graphe est un triplet $G = (V, E, \phi)$ comprenant

- V un ensemble de sommets ;
- E un ensemble d'arêtes ;
- $\phi: E \rightarrow \{\{x, y\} \mid x, y \in V\}$ une fonction d'incidence associant à chaque arête une paire de sommets.

Un graphe orienté est un triplet $G = (V, A, \phi)$ comprenant

- V un ensemble de sommets ;
- A un ensemble d'arcs ;
- $\phi: A \rightarrow \{(x, y) \mid x, y \in V\}$ une fonction d'incidence associant à chaque arc un couple de sommets.

Histoire

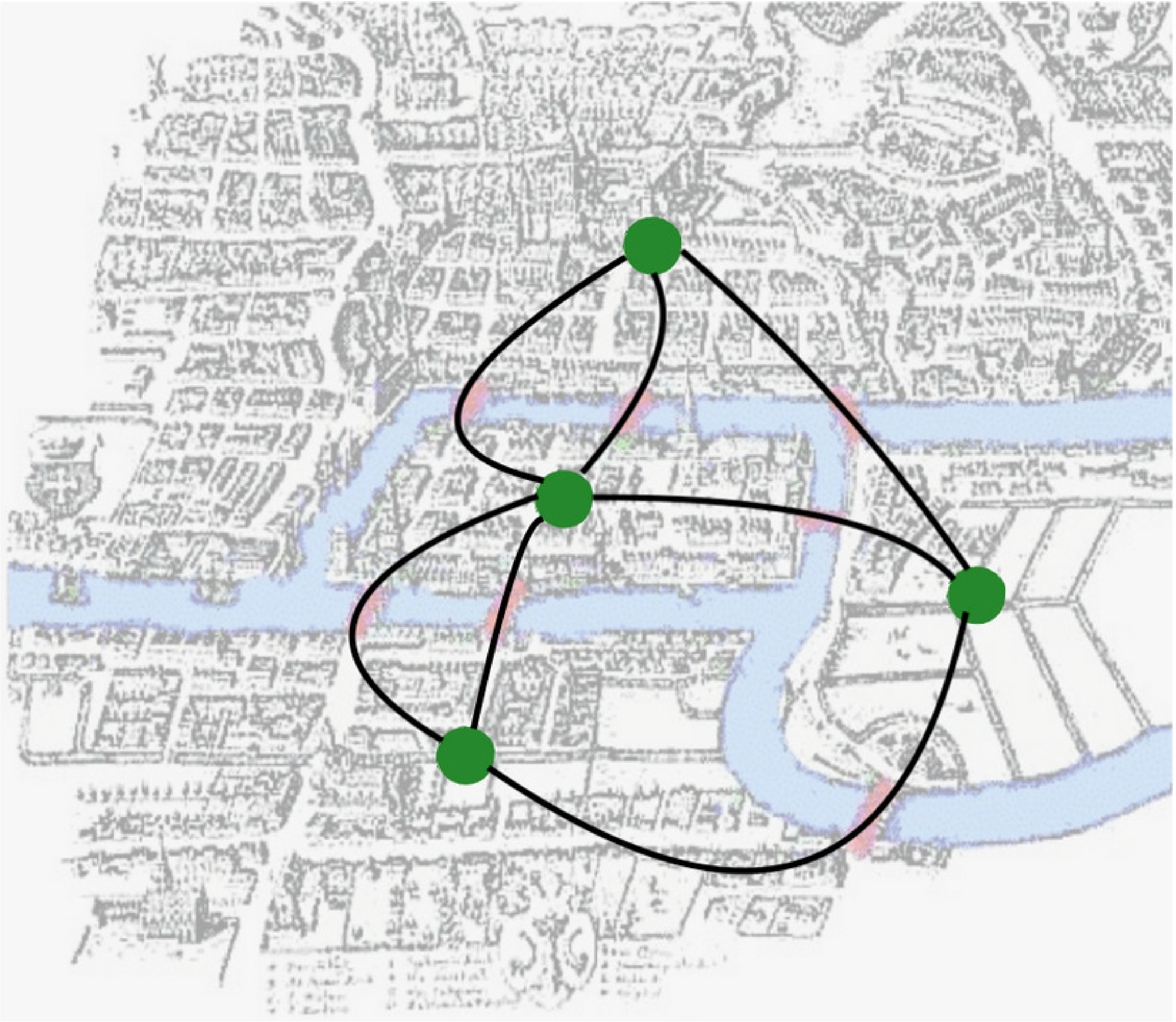


Les sept ponts de Königsberg

Histoire

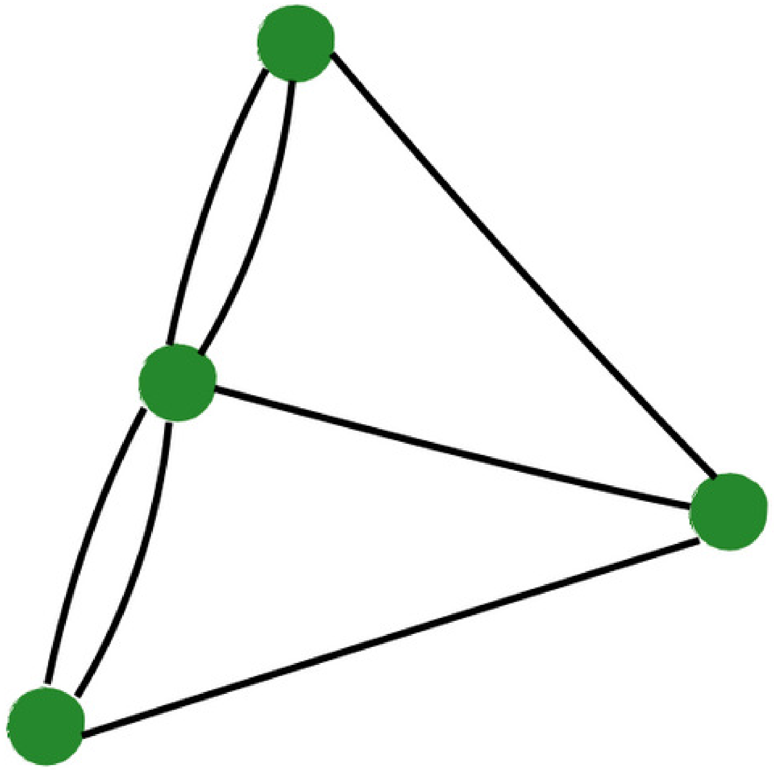
Les sept ponts de Königsberg

Histoire



Les sept ponts de Königsberg

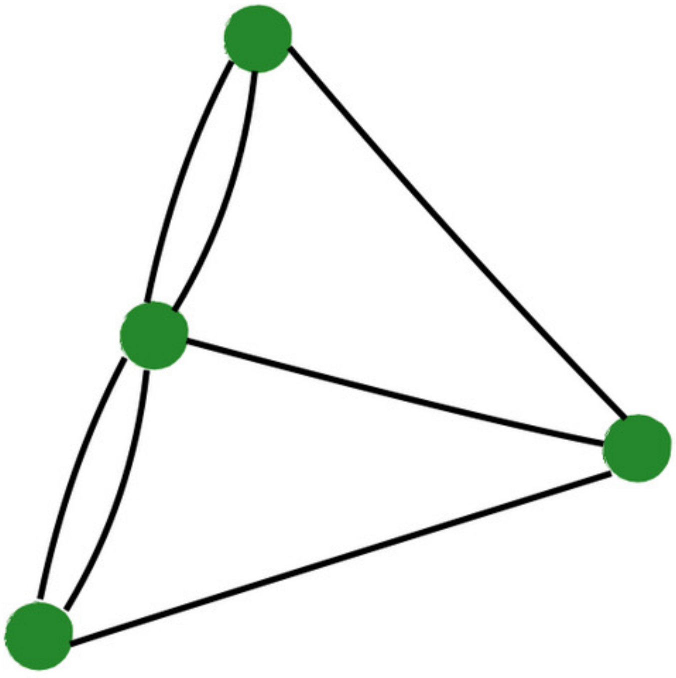
Histoire



Histoire

Est-il possible de marcher sur tous les ponts une et une seule fois en partant et arrivant au même endroit dans la ville de Königsberg?

Existe-t-il un circuit eulérien dans ce graphe ?



Eulerien/Hamiltonien

Définition

Un circuit eulérien est un circuit qui passe une fois et
une seule par chaque arête du graphe.

Théorème (Euler-Hierholzer, 1873)

Un graphe connexe admet un circuit eulérien si et seulement si
tous ses sommets sont de degré pair.

Définition

Un circuit hamiltonien est un circuit qui passe une fois et
une seule par chaque sommet du graphe.

Le problème le plus connu

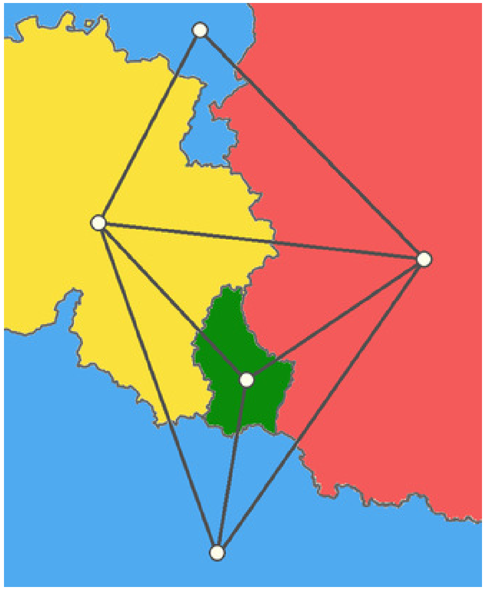
Combien de couleurs différentes sont nécessaires pour colorier n'importe quelle carte ?

Le problème le plus connu

Théorème

Tout graphe planaire est 4-coloriable.

- 1852 Conjecturé
- 1879 Démonstrations publiées (réfutées en 1880)
- 1976 Preuve par ordinateur



Facile ou difficile ?

Existe-t-il un circuit eulérien ?

P	NP-dur

Facile ou difficile ?

P

EULERIEN

NP-dur

Facile ou difficile ?

Existe-t-il un circuit hamiltonien ?

P

NP-dur

EULERIEN

Facile ou difficile ?

P	NP-dur
EULERIEN	HAMILTONIEN

Facile ou difficile ?

Existe-t-il une 4-coloration ?

P	NP-dur
EULERIEN	HAMILTONIEN

Facile ou difficile ?

P	NP-dur
EULERIEN	HAMILTONIEN
	4-COULEUR

Facile ou difficile ?

Existe-t-il une 2-coloration ?

P	NP-dur
EULERIEN	HAMILTONIEN
	4-COULEUR

Facile ou difficile ?

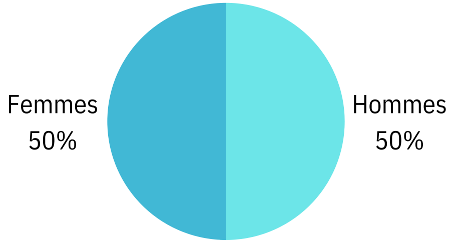
P	NP-dur
EULERIEN	HAMILTONIEN
2-COULEUR	4-COULEUR

Mais...

Que fait l'équipe "théorie des graphes" du CERMICS ?

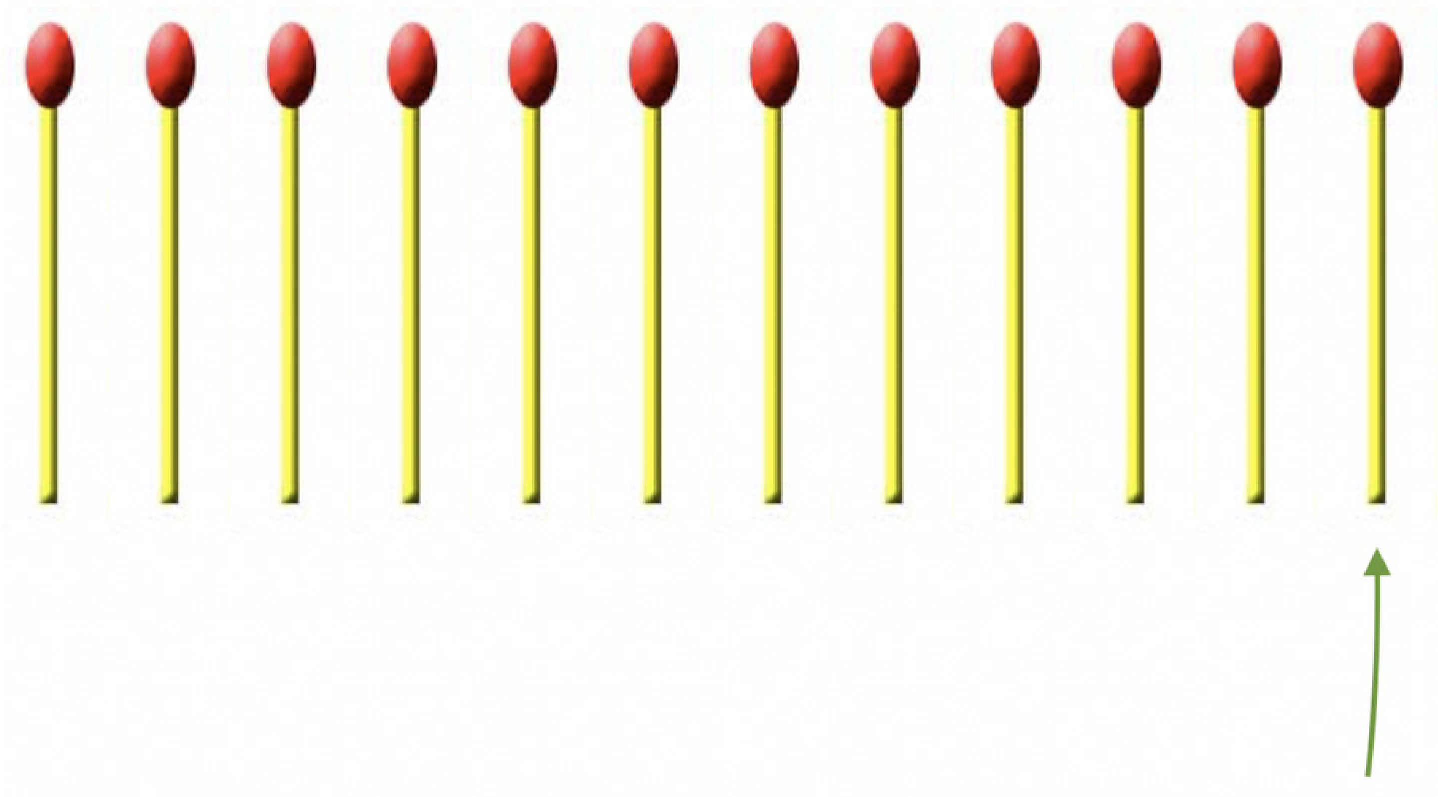
Les membres de l'équipe :

Les membres de l'équipe :

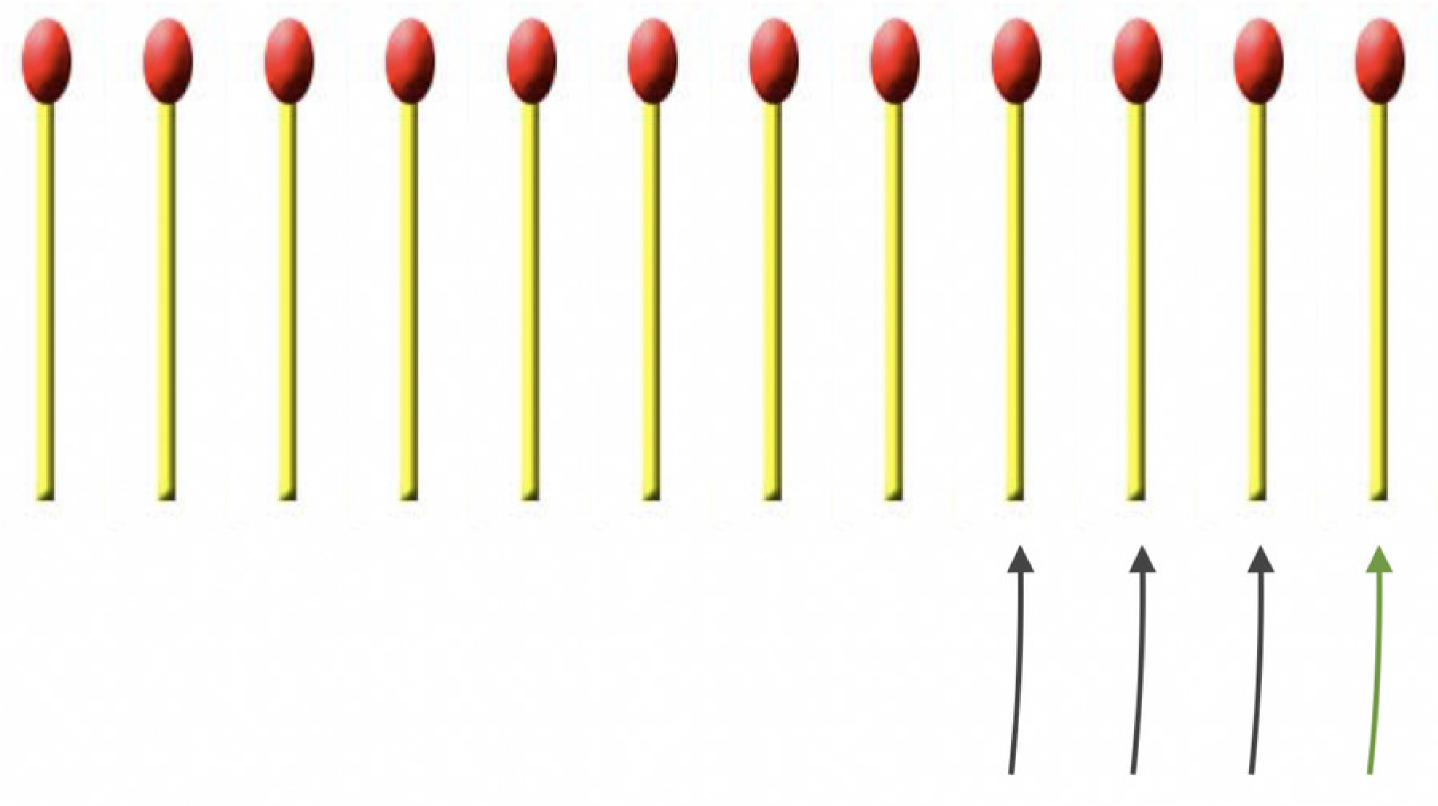


Noyaux : le jeu des allumettes

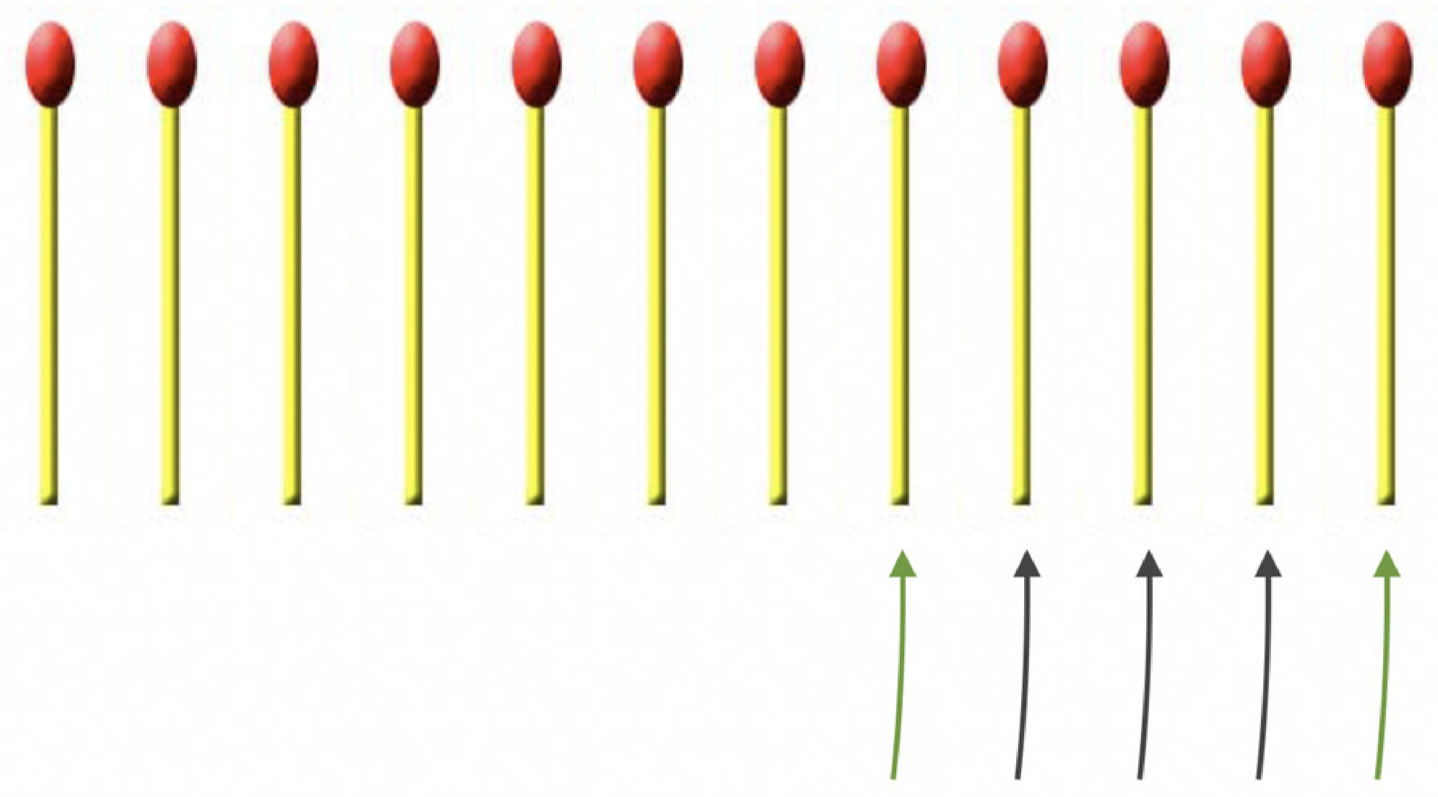
Noyaux : le jeu des allumettes



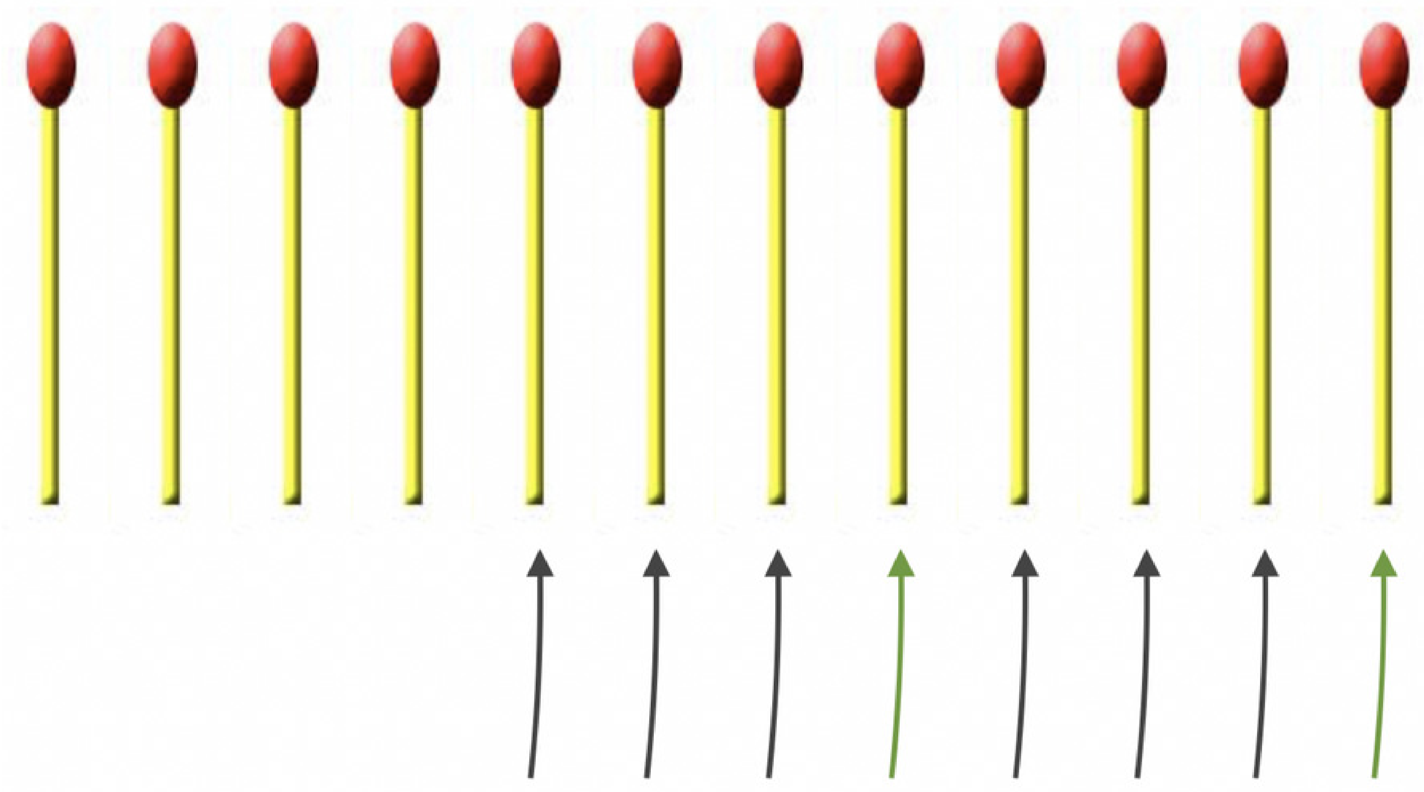
Noyaux : le jeu des allumettes



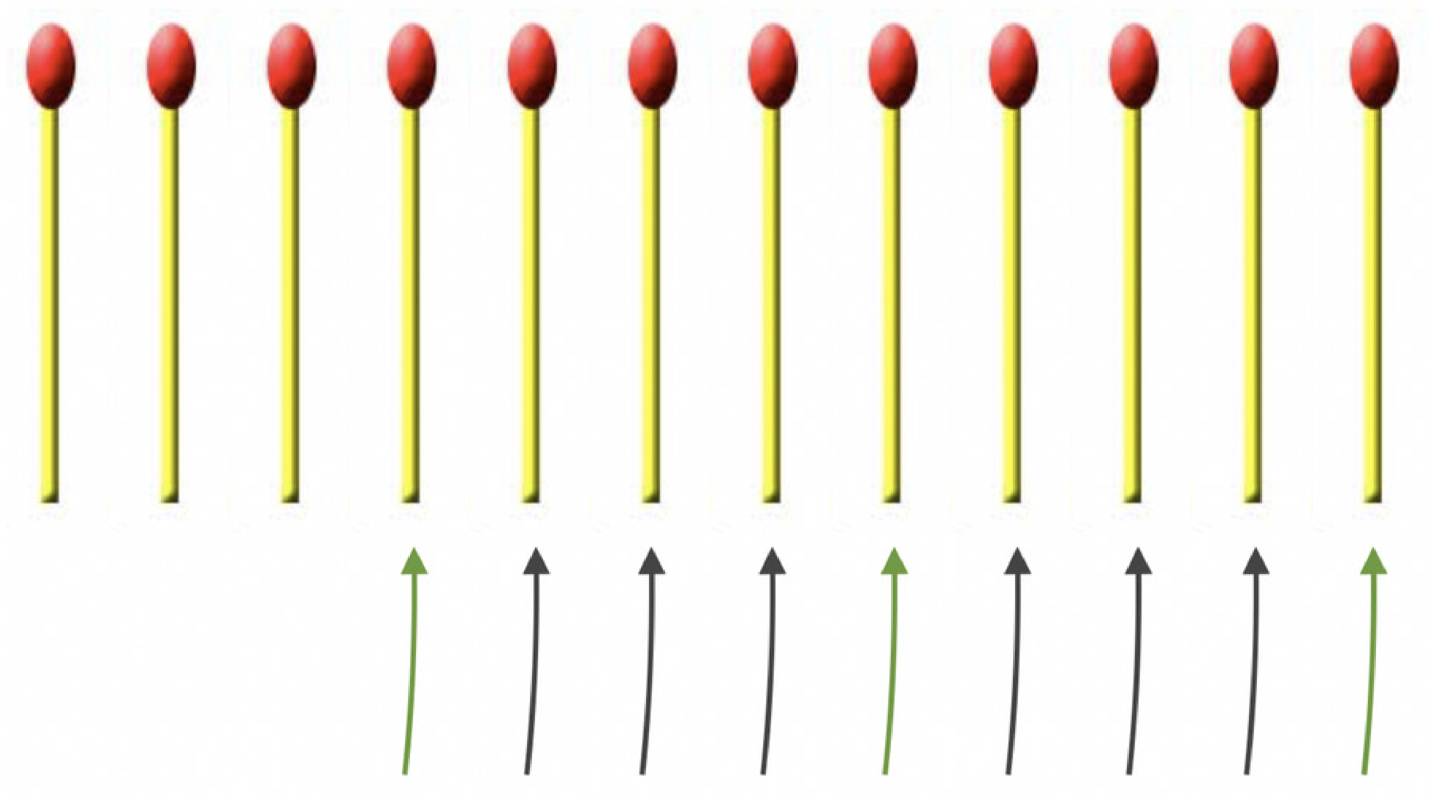
Noyaux : le jeu des allumettes



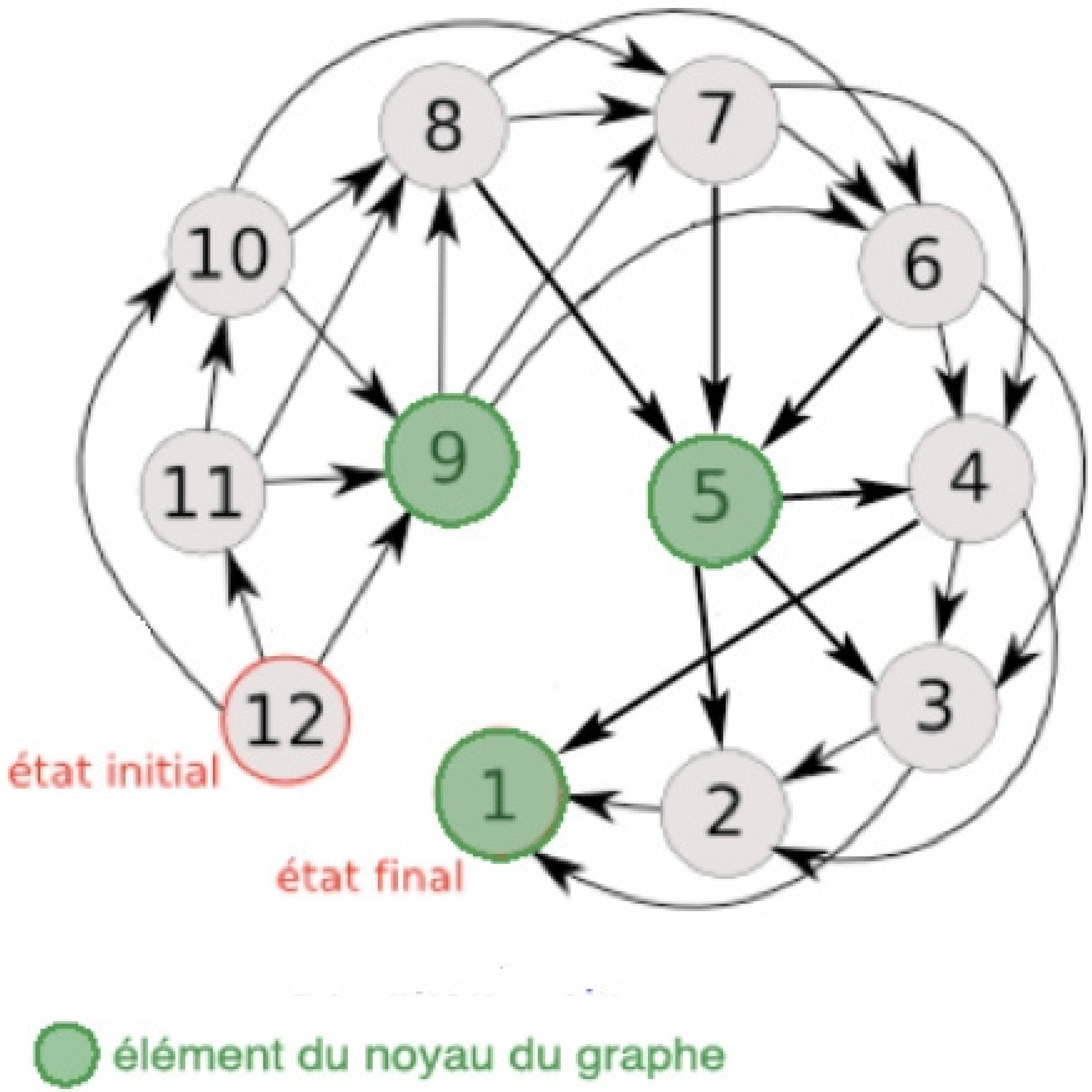
Noyaux : le jeu des allumettes



Noyaux :   le jeu des allumettes



Noyaux : le jeu des allumettes



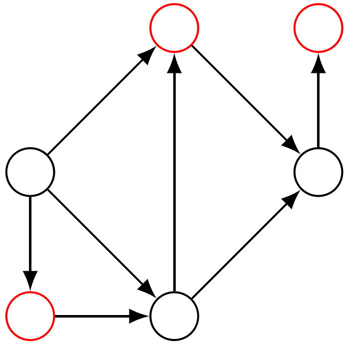
Noyaux : définition

En 1944, von Neumann et Morgenstern introduisent la notion de noyau dans le livre “Theory of Games and Economic Behavior”.

Un noyau dans un graphe orienté est un ensemble de sommets qui est

indépendant,

absorbant.



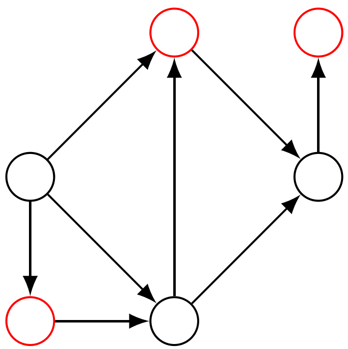
Noyaux : définition

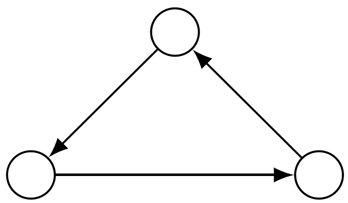
En 1944, von Neumann et Morgenstern introduisent la notion de noyau dans le livre “Theory of Games and Economic Behavior”.

Un noyau dans un graphe orienté est un ensemble de sommets qui est

indépendant,

absorbant.





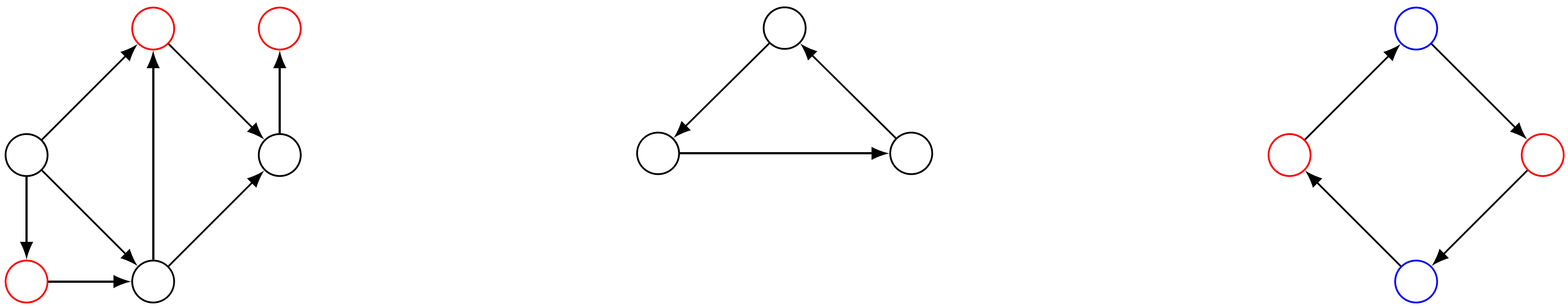
Noyaux : définition

En 1944, von Neumann et Morgenstern introduisent la notion de noyau dans le livre “Theory of Games and Economic Behavior”.

Un noyau dans un graphe orienté est un ensemble de sommets qui est

indépendant,

absorbant.



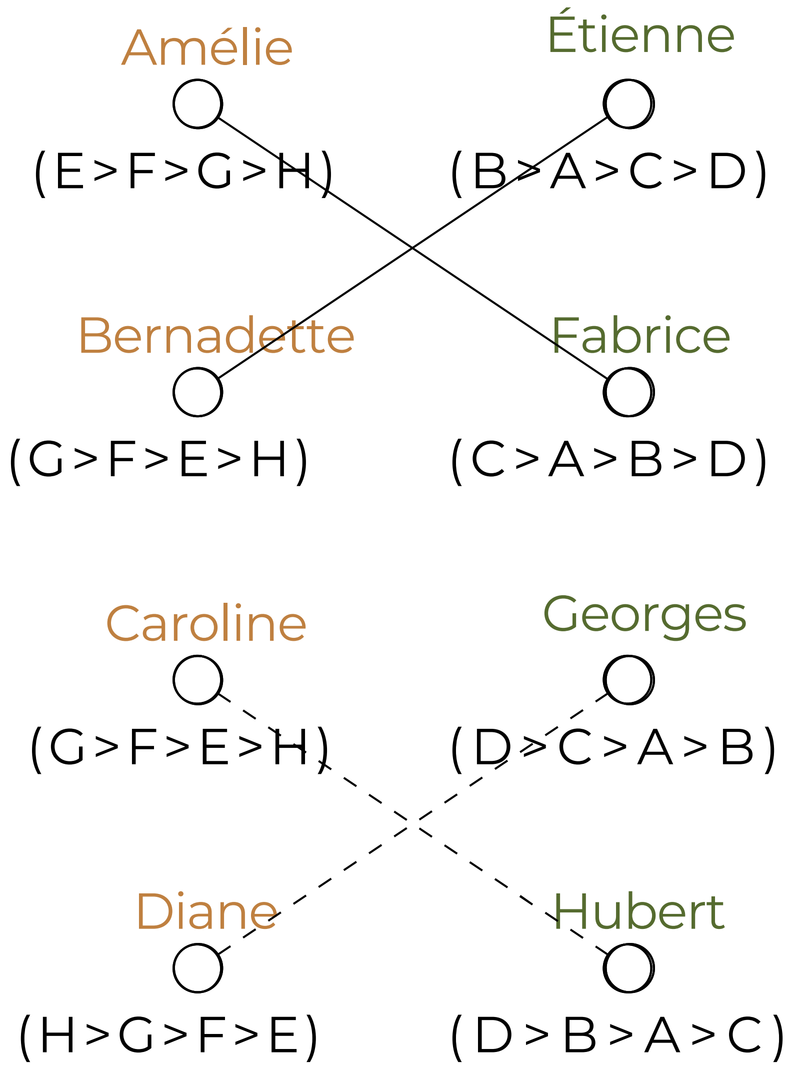
Noyaux : de multiples applications

- Théorie des jeux : positions gagnantes dans les jeux combinatoires
- Économie : mariages stables, théorème de Gale et Shapley
- Logique : paradoxes logiques
- Mathématiques : preuve de la conjecture de Dinitz

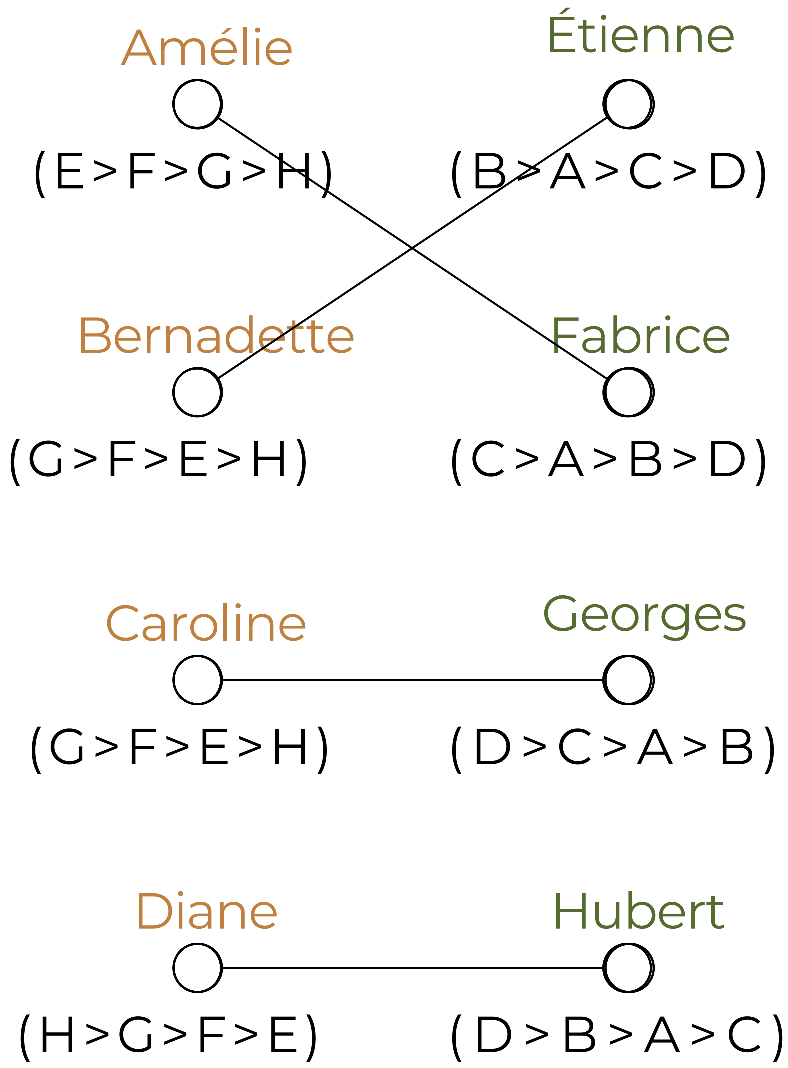
Noyaux : mariages stables

Amélie	Étienne
(E > F > G > H)	(B > A > C > D)
Bernadette	Fabrice
(G > F > E > H)	(C > A > B > D)
Caroline	Georges
(G > F > E > H)	(D > C > A > B)
Diane	Hubert
(H > G > F > E)	(D > B > A > C)

Noyaux : mariages stables



Noyaux : mariages stables



Noyaux : mariages stables

Définition

Une collection de mariages est dite stable s'il n'existe pas de couple non marié (f , h) tel qu'on ait à la fois :

- f préfère h à son conjoint et
- h préfère f à sa conjointe.

Noyaux : mariages stables

Définition

Une collection de mariages est dite stable s'il n'existe pas de couple non marié (f , h) tel qu'on ait à la fois :

- f préfère h à son conjoint et
- h préfère f à sa conjointe.

Théorème (Gale, Shapley 1962)

Il existe toujours au moins une collection stable de mariages.

Preuve : algorithme d'acceptation différée.

Noyaux : mariages stables

Amélie
(E>F>G>H)

Étienne
(B>A>C>D)

Bernadette
(G>F>E>H)

Fabrice
(C>A>B>D)

Caroline
(G>F>E>H)

Georges
(D>C>A>B)

Diane
(H>G>F>E)

Hubert
(D>B>A>C)

A,E	B,E	C,E	D,E
A,F	B,F	C,F	D,F
A,G	B,G	C,G	D,G
A,H	B,H	C,H	D,H

Noyaux : mariages stables

Amélie
(E>F>G>H)

Étienne
(B>A>C>D)

Bernadette
(G>F>E>H)

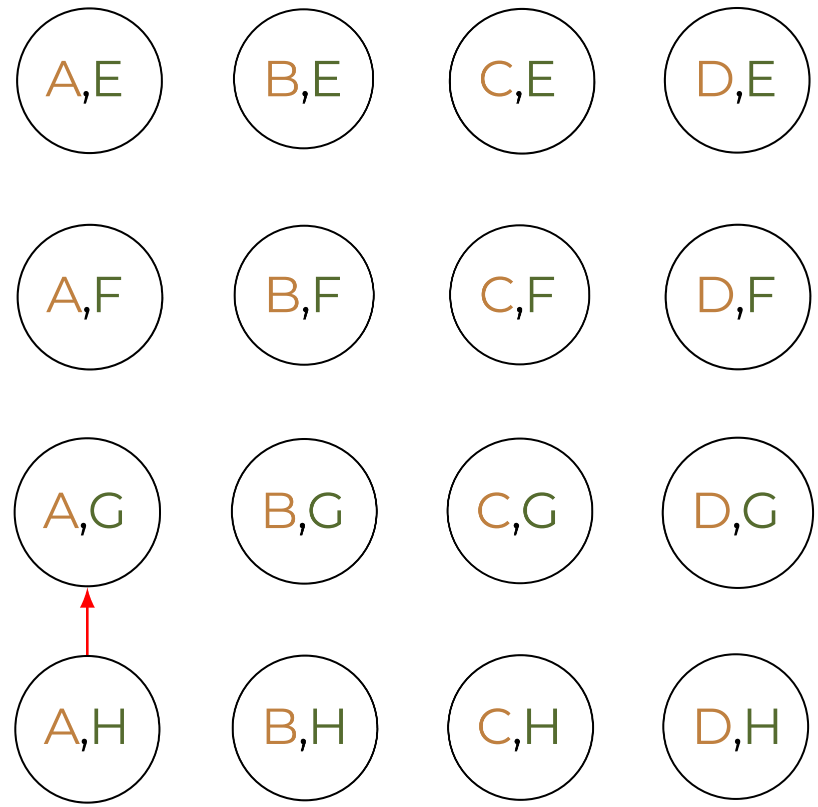
Fabrice
(C>A>B>D)

Caroline
(G>F>E>H)

Georges
(D>C>A>B)

Diane
(H>G>F>E)

Hubert
(D>B>A>C)



Noyaux : mariages stables

Amélie
(E>F>G>H)

Étienne
(B>A>C>D)

Bernadette
(G>F>E>H)

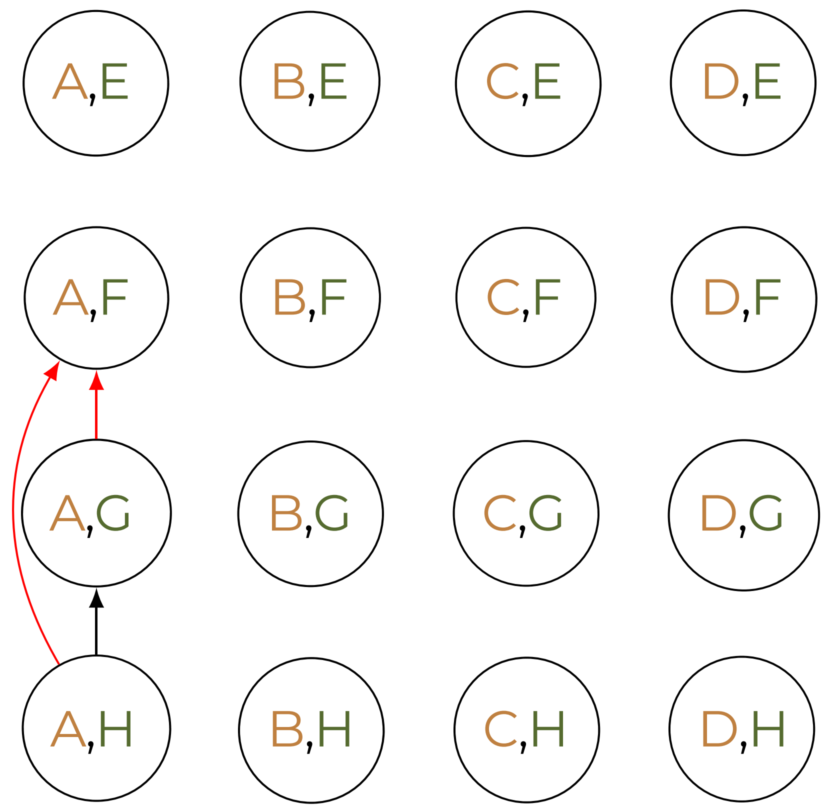
Fabrice
(C>A>B>D)

Caroline
(G>F>E>H)

Georges
(D>C>A>B)

Diane
(H>G>F>E)

Hubert
(D>B>A>C)



Noyaux : mariages stables

Amélie
(E > F > G > H)

Étienne
(B > A > C > D)

Bernadette
(G > F > E > H)

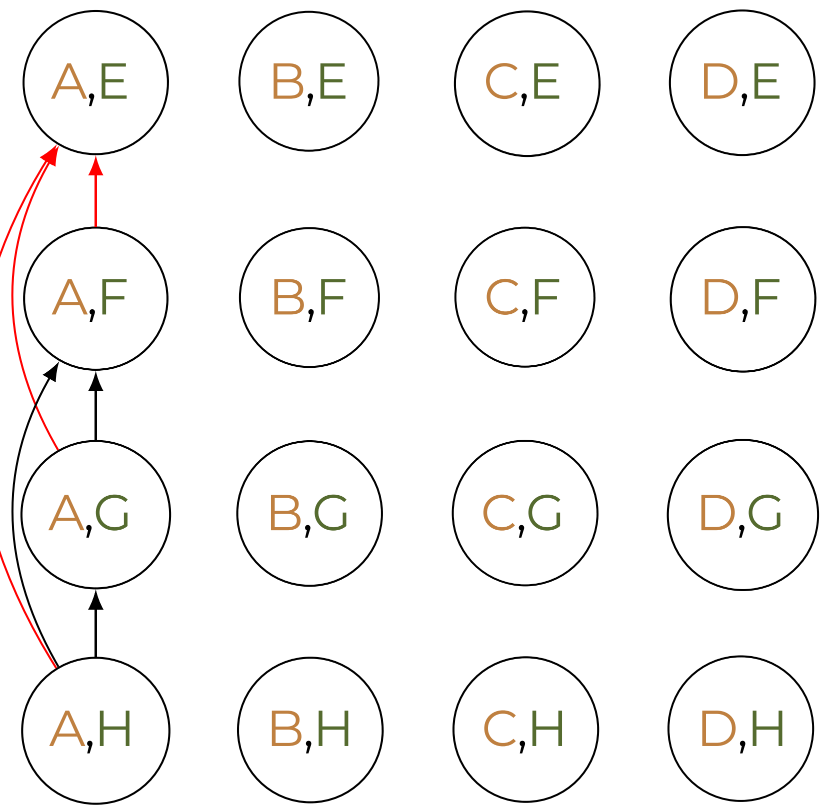
Fabrice
(C > A > B > D)

Caroline
(G > F > E > H)

Georges
(D > C > A > B)

Diane
(H > G > F > E)

Hubert
(D > B > A > C)



Noyaux : mariages stables

Amélie
(E > F > G > H)

Étienne
(B > A > C > D)

Bernadette
(G > F > E > H)

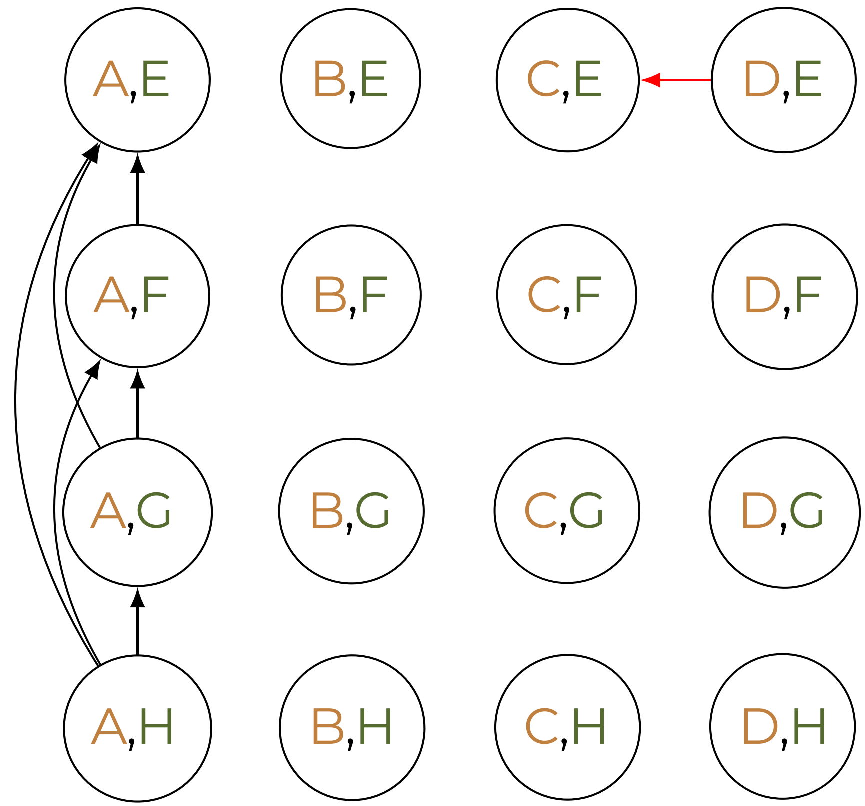
Fabrice
(C > A > B > D)

Caroline
(G > F > E > H)

Georges
(D > C > A > B)

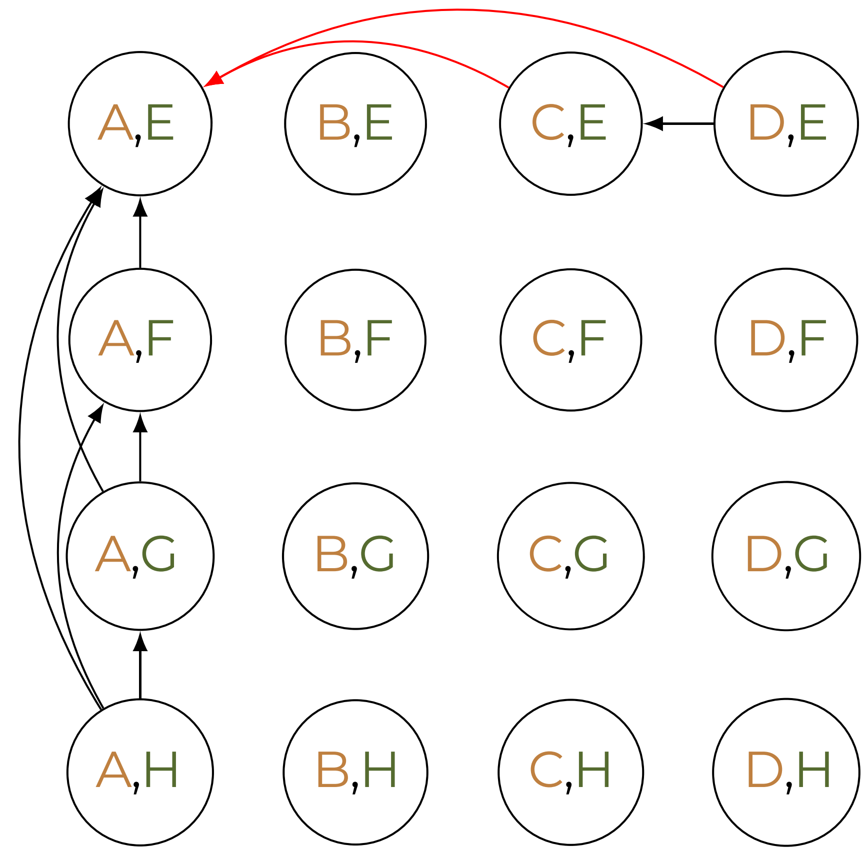
Diane
(H > G > F > E)

Hubert
(D > B > A > C)



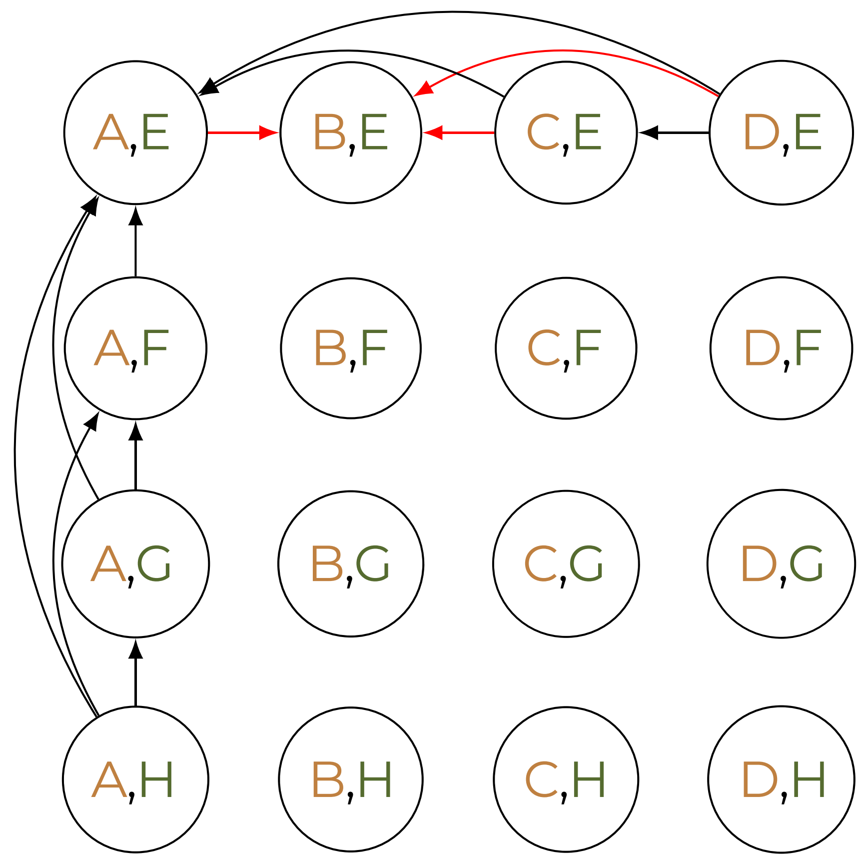
Noyaux : mariages stables

Amélie	Étienne
(E>F>G>H)	(B>A>C>D)
Bernadette	Fabrice
(G>F>E>H)	(C>A>B>D)
Caroline	Georges
(G>F>E>H)	(D>C>A>B)
Diane	Hubert
(H>G>F>E)	(D>B>A>C)



Noyaux : mariages stables

Amélie	Étienne
(E > F > G > H)	(B > A > C > D)
Bernadette	Fabrice
(G > F > E > H)	(C > A > B > D)
Caroline	Georges
(G > F > E > H)	(D > C > A > B)
Diane	Hubert
(H > G > F > E)	(D > B > A > C)



Noyaux : mariages stables

Amélie

(E>F>G>H)

Étienne

(B>A>C>D)

Bernadette

(G>F>E>H)

Fabrice

(C>A>B>D)

Caroline

(G>F>E>H)

Georges

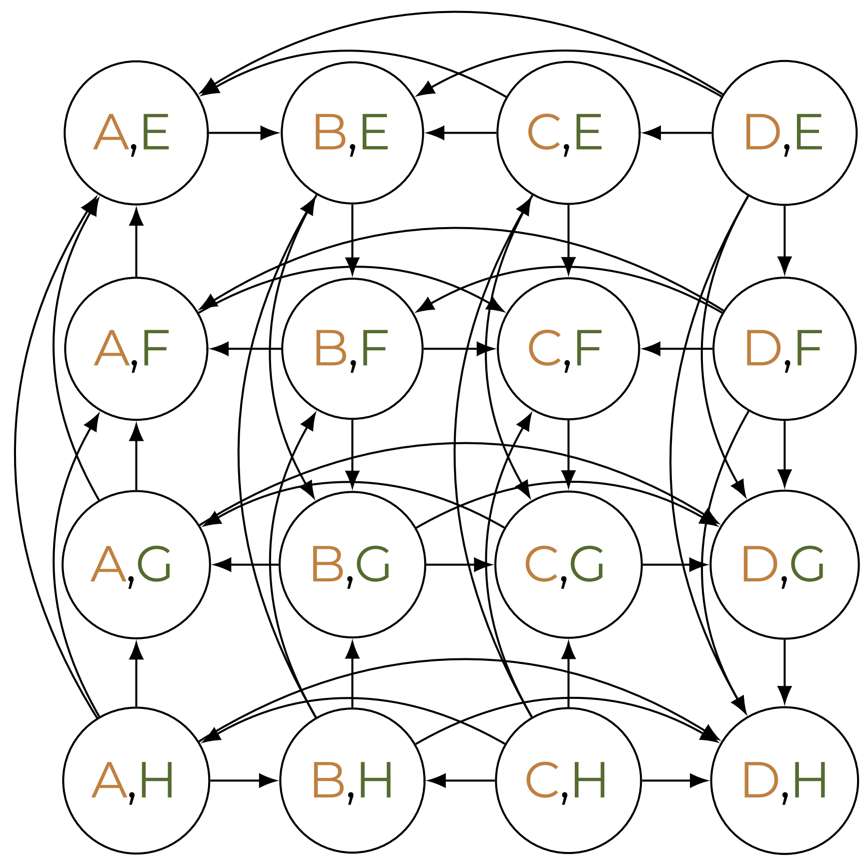
(D>C>A>B)

Diane

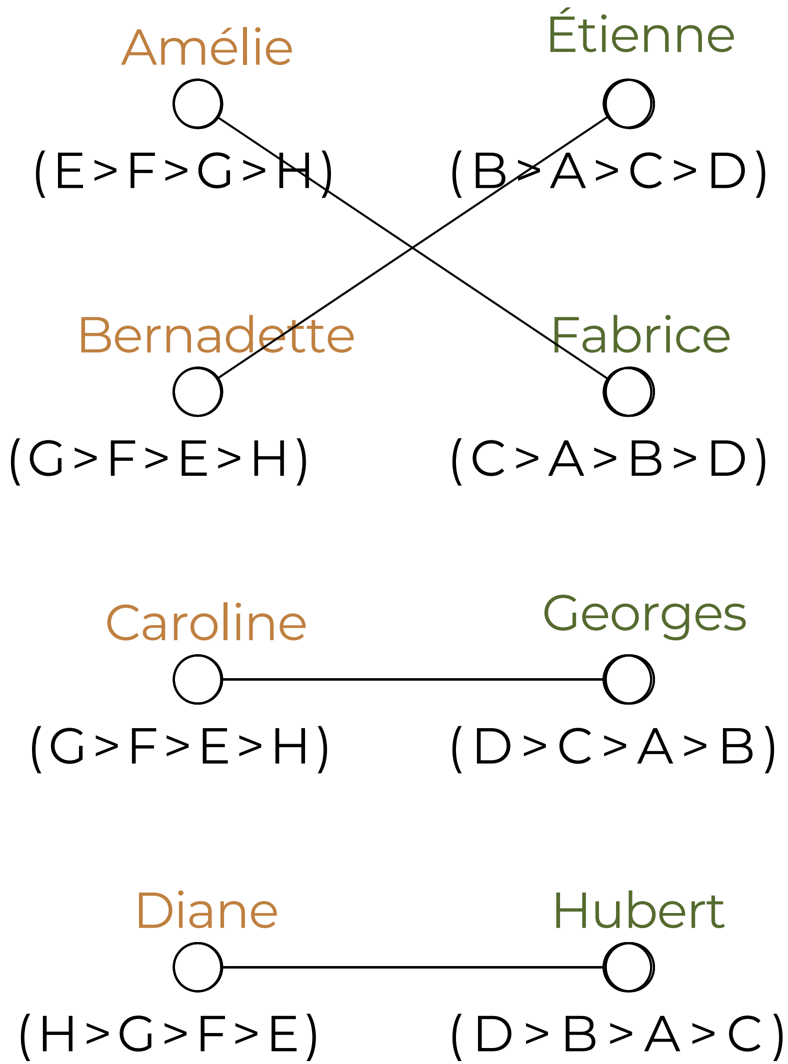
(H>G>F>E)

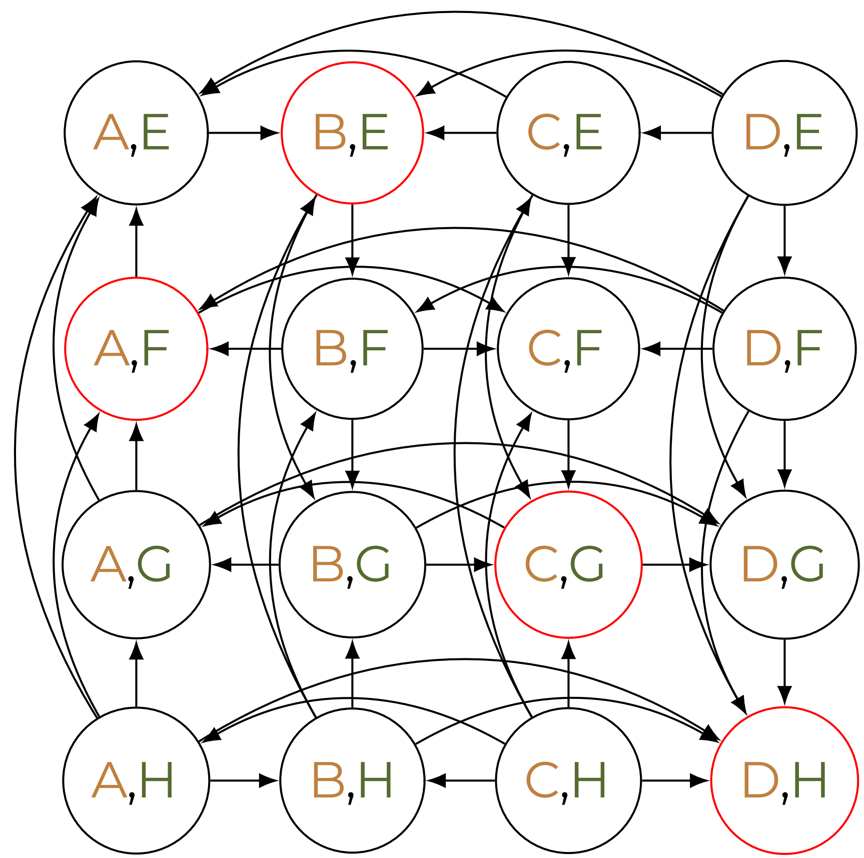
Hubert

(D>B>A>C)

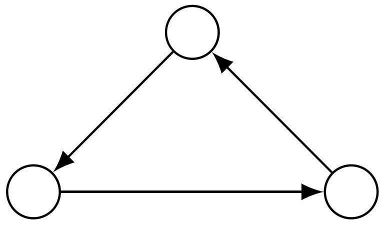


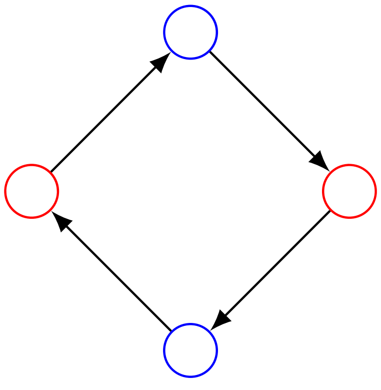
Noyaux : mariages stables



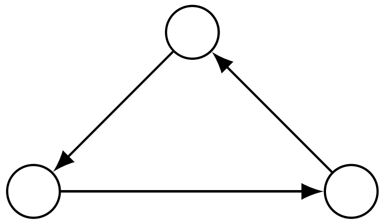


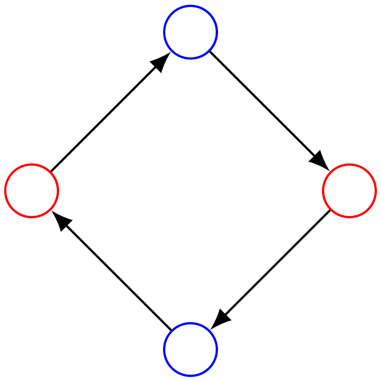
Noyaux : existence





Noyaux : existence





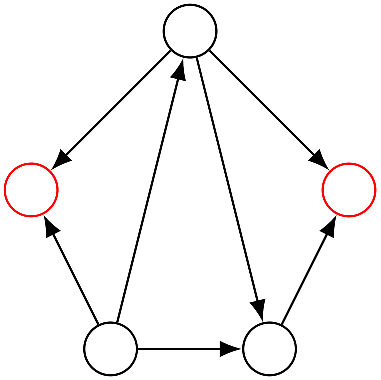
Proposition (Chvátal 1973)

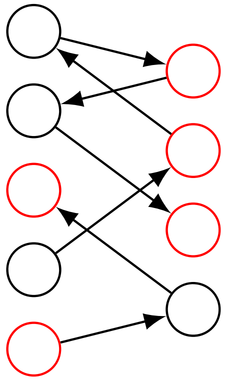
Le problème d'existence d'un noyau dans un graphe orienté est NP-complet.

Noyaux : graphes parfaits

Théorème (Boros, Gurvich 1996)

Une M-orientation d'un graphe parfait possède toujours un noyau.





Noyaux : complexité

Question

Quelle est la complexité algorithmique de trouver un noyau dans un graphe parfait ?

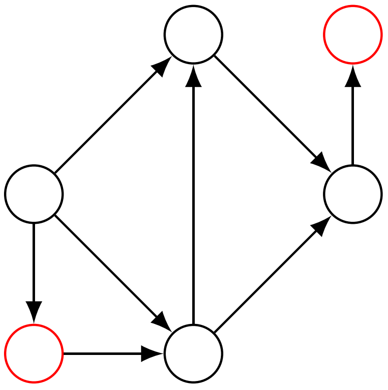
On sait que c'est polynomial pour :

- les unions de deux graphes transitifs (Sands, Sauer, Woodrow 1982),
- les graphes de comparabilités (Abbas, Saoula 2005) et
- les graphes triangulés (Igarashi, Meunier, Pass-Lanneau 2018).

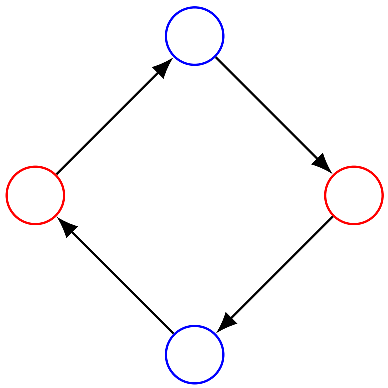
Quasi-noyaux : définition

Un quasi-noyau dans un graphe orienté est un ensemble de sommets qui est

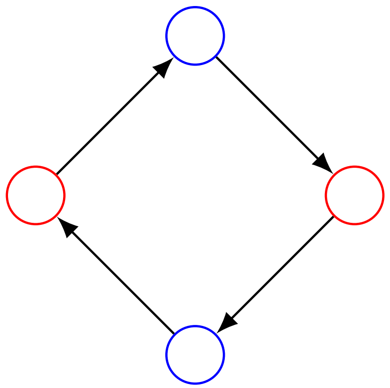
- indépendant,
- 2-absorbant.

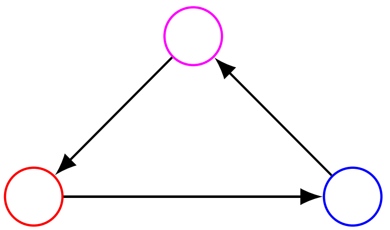


Quasi-noyaux : existence

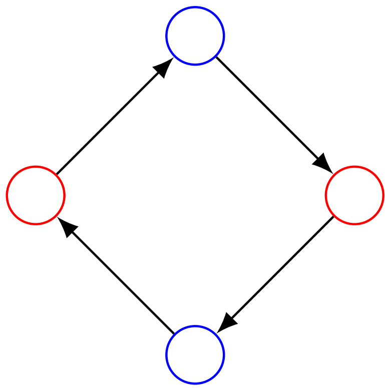


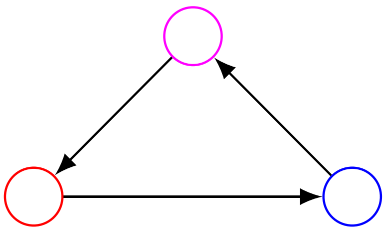
Quasi-noyaux : existence





Quasi-noyaux : existence





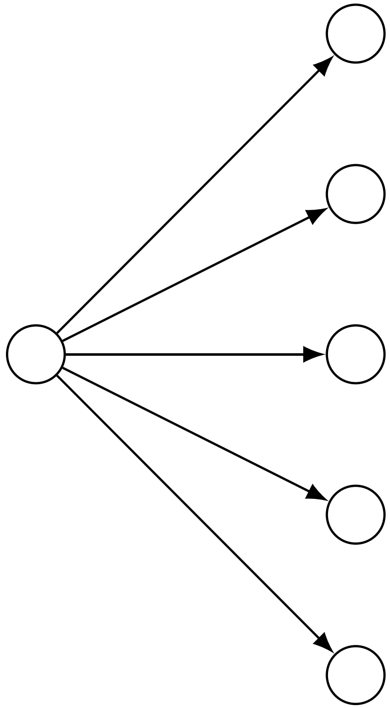
Théorème (Chvátal, Lovász 1974)

Tout graphe orienté possède un quasi-noyau.

Quasi-noyaux : conjecture d'Erdős et Székely

Conjecture (Erdős, Székely 1976)

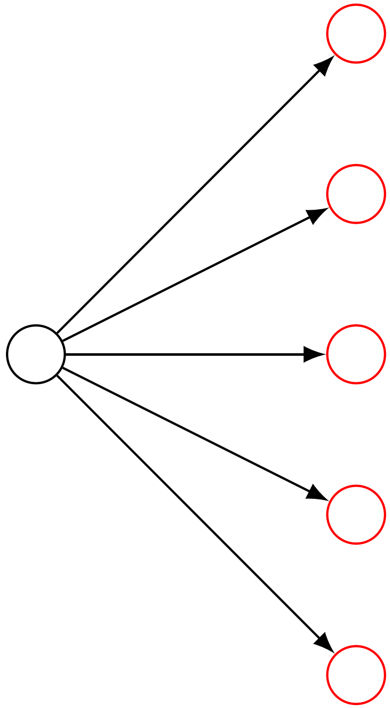
Si D = (V,A) est un graphe orienté sans puits, alors il possède un quasi-noyau de taille |V|/2.



Quasi-noyaux : conjecture d'Erdős et Székely

Conjecture (Erdős, Székely 1976)

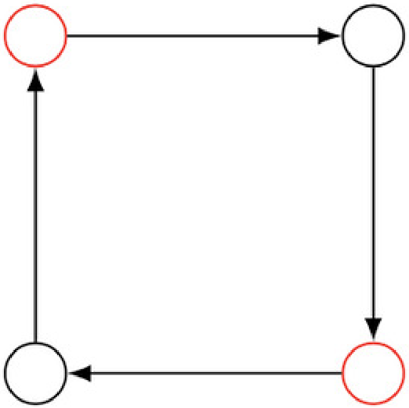
Si $D = (V,A)$ est un graphe orienté sans puits, alors il possède un quasi-noyau de taille $|V|/2$.

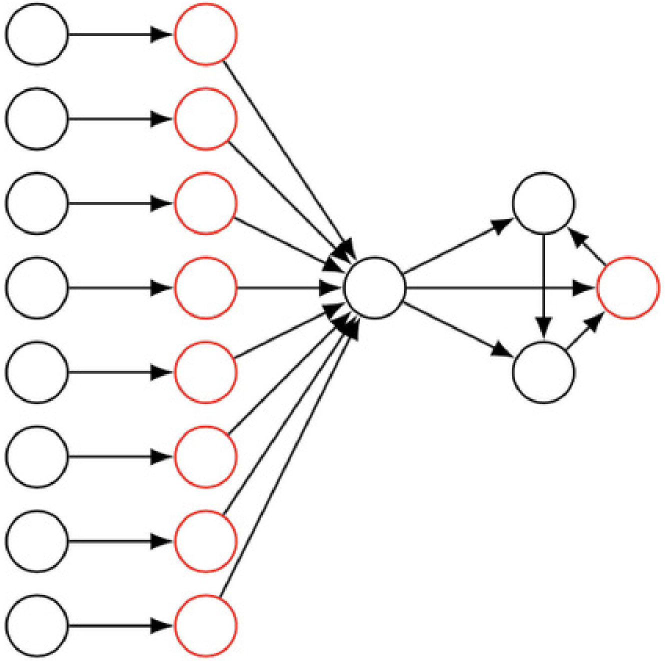


Quasi-noyaux : conjecture d'Erdős et Székely

Conjecture (Erdős, Székely 1976)

Si D = (V,A) est un graphe orienté sans puits, alors il possède un quasi-noyau de taille |V|/2.





Quasi-noyaux : conjecture d'Erdős et Székely

Conjecture (Erdős, Székely 1976)

Si $D = (V,A)$ est un graphe orienté sans puits, alors il possède un quasi-noyau de taille $|V|/2$.

Prouvé pour :

- les graphes semicomplets multipartites (Heard, Yang 2008),
- les graphes quasi-transitifs (Heard, Yang 2008),
- les graphes localement semicomplets (Heard, Yang 2008) et
- les graphes 4-coloriables (Kostochka, Luo, Shan 2020).

Quasi-noyaux : deux quasi-noyaux disjoints

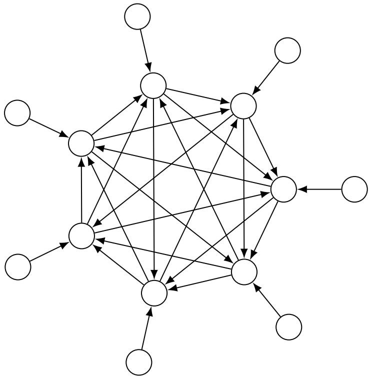
Proposition (Heard, Yang 2008)

Les graphes semicomplets multipartites, les graphes quasi-transitifs et les graphes localement semicomplets possèdent deux quasi-noyaux disjoints.

Conjecture (Gutin, Koh, Tay, Yeo 2001)

Tout graphe orienté sans puits possède deux quasi-noyaux disjoints.

Contre-exemple :



Quasi-noyaux : deux quasi-noyaux disjoints

Proposition (L., Meunier, Rizzi, Vialette 2021)

Décider s'il existe deux quasi-noyaux disjoints est un problème NP-complet.

Quasi-noyaux : conjecture d'Erdős et Székely

Théorème (Kostochka, Luo, Shan 2020)

Tout graphe orienté sans puits dont le graphe sous-jacent est 4-coloriable vérifie la conjecture d'Erdős et Székely.

Quasi-noyaux : conjecture d'Erdős et Székely

Théorème (Kostochka, Luo, Shan 2020)

Tout graphe orienté sans puits dont le graphe sous-jacent est 4-coloriable vérifie la conjecture d'Erdős et Székely.

Théorème (L., Meunier, Vialette 2021+)

Tout one-way split graphe orienté vérifie la conjecture d'Erdős et Székely.

Théorème (L., Meunier, Vialette 2022+)

Tout split graphe orienté sans puits a un quasi-noyau de taille au plus $3|V|/4$.

Quasi-noyaux minimum : quelques résultats

Proposition (L., Meunier, Vialette 2021)

Il existe un algorithme polynomial pour trouver un quasi-noyau de taille minimal dans :

- un split graphe complet,
- un graphe à largeur arborescente bornée.

Proposition (L., Meunier, Vialette 2021)

Décider s'il existe un quasi-noyau de taille au plus k est un problème NP-complet dans :

- orientation acyclique d'un graphe cubique,
- une orientation d'un split graphe,
- orientation acyclique d'un graphe biparti.

Merci !