

Séminaire de Calcul Scientifique du CERMICS



**Stabilization of 1-D nonlinear hyperbolic systems
with boundary controls**

Amaury Hayat (LJLL, Sorbonne Université)

4 mai 2018

Stabilization of 1-D nonlinear hyperbolic systems with boundary controls

Amaury Hayat

Laboratoire Jacques-Louis Lions, UPMC - LHSV ENPC

Georges Bastin, Jean-Michel Coron, Peipei Shang

Séminaire Calcul Scientifique - CERMICS

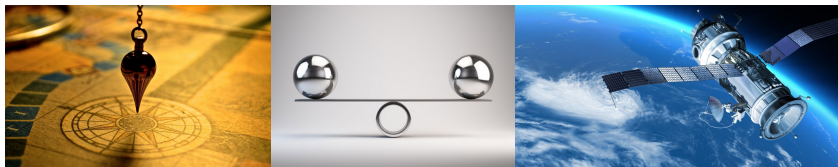
4 mai 2018



ETH zürich

Qu'est-ce que la stabilisation?

- Rendre robuste un système qui suit une trajectoire / qui est à l'équilibre vis à vis des perturbations.
- Rendre robuste vis à vis des erreurs de modèle.

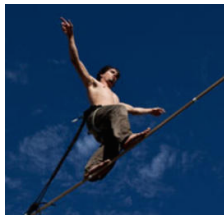


Une question de plus en plus d'actualité:

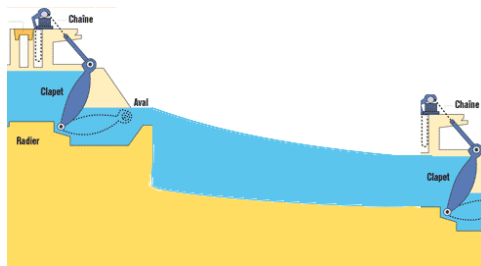
- Technologies de plus en plus complexes.
- Grande tendance à l'automatisation (robotisation, véhicule autonome, communication, etc.)

Comment stabiliser un système?

- Un feedback (ou boucle de rétroaction)
 $u(t) = f(y(t))$



Contrôle interne



Contrôles aux bords

Plan de la présentation

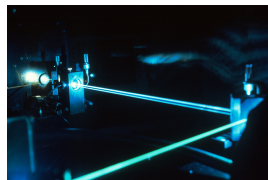
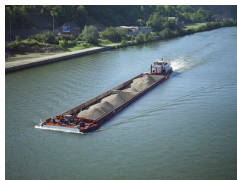
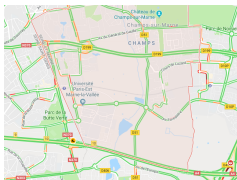
- 1 Systèmes hyperboliques en général
- 2 Equations de Saint-Venant inhomogènes
- 3 Stabilisation d'états stationnaires avec choc
- 4 Contrôles Proportionnels-Integraux (PI)

Sommaire

- 1 Systèmes hyperboliques en général
- 2 Equations de Saint-Venant inhomogènes
- 3 Stabilisation d'états stationnaires avec choc
- 4 Contrôles Proportionnels-Integraux (PI)

Systèmes hyperboliques

Un système qui se propage



Mathématiquement: $\mathbf{Y}_t + F(\mathbf{Y})\mathbf{Y}_x + G(\mathbf{Y}, x) = 0$ autour de $\mathbf{Y}^*$,
 $F(\mathbf{Y})$ diagonalisable.

avec un changement de variable

$$u_t + A(\mathbf{u}, x)\mathbf{u}_x + B(\mathbf{u}, x) = 0 \text{ autour de } \mathbf{u}^* = 0$$

Systèmes hyperboliques

Mathématiquement: $\mathbf{Y}_t + F(\mathbf{Y})\mathbf{Y}_x + G(\mathbf{Y}, x) = 0$ autour de $\mathbf{Y}^*$,
 F diagonalisable.

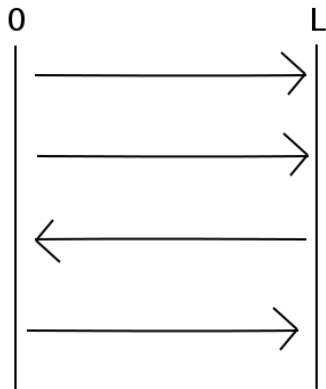
avec un changement de variable

$$u_t + A(\mathbf{u}, x)\mathbf{u}_x + B(\mathbf{u}, x) = 0 \text{ autour de } \mathbf{u}^* = 0$$

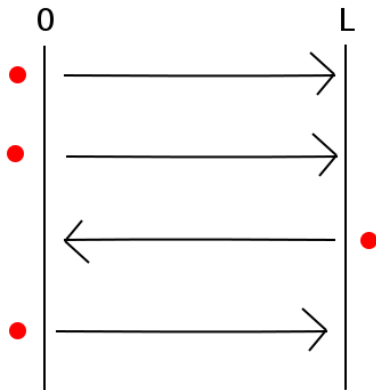
où

$$A(\mathbf{0}, x) = \begin{pmatrix} \lambda_1(x) & & (0) \\ \dots & \dots & \dots \\ (0) & & \lambda_n(x) \end{pmatrix} \quad (1)$$

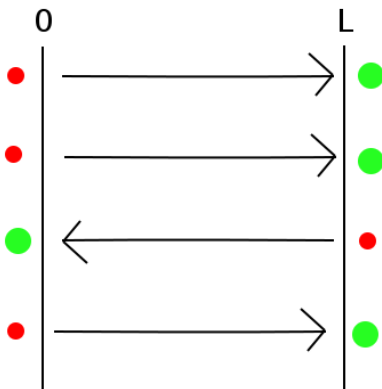
Systèmes hyperboliques



Systèmes hyperboliques



Systèmes hyperboliques



On utilisera des contrôles très simples, quelques raisons:

- Rarement plus d'information sur le système (but: maths compliquées/ ingénierie facile)
- Un choix naturel de feedback (l'information d'entrée est une fonction de l'information de sortie)
- Très étudiés

Systèmes hyperboliques

Est-ce qu'on peut tout stabiliser?

Systèmes hyperboliques

Est-ce qu'on peut tout stabiliser?

Non, en général une limite:

Par exemple : si on essaye de stabiliser $\mathbf{u}^* = 0$ pour le système

$$\partial_t u_1 + \partial_x u_1 + cu_2 = 0$$

$$\partial_t u_2 - \partial_x u_2 + cu_1 = 0$$

avec les conditions aux bords:

$$u_1(t, 0) = u_2(t, 0)$$

$$u_2(t, L) = f(u_1(t, L))$$

Pour $L > \frac{\pi}{c}$ aucun f régulier ne fonctionne!

→ Une longueur limite $L_{\max}$ (ou de façon équivalente une borne limite sur le terme source c)

Systèmes hyperboliques

Est-ce qu'on peut tout stabiliser?

En général: le problème vient du couplage entre deux quantités qui ont des sens de propagation différents.

- Pas de problème quand même sens de propagation
- Pas de problème quand pas de terme source (pas de couplage)

Pour chaque système, deux questions:

- Est-ce qu'il y a une limite $L_{\max}$? (ou de façon équivalente une borne sur le terme source)
- Quand on est en dessous de la limite, quelles conditions sur les contrôles?

Comment prouver la stabilité (pour un système non-linéaire)?

Plusieurs bonnes approches, deux exemples:

- Méthode du backstepping: très belle, mais donne lieu à des contrôles “full-state” compliqués (Krstic, Coron, Smyshlyaev, etc.)
- Méthode de Lyapunov directe: très utile pour les systèmes non-linéaires.

Comment prouver la stabilité (pour un système non-linéaire)?

Plusieurs bonnes approches, deux exemples:

- Méthode du backstepping: très belle, mais donne lieu à des contrôles “full-state” compliqués (Krstic, Coron, Smyshlyaev, etc.)
- Méthode de Lyapunov directe: très utile pour les systèmes non-linéaires.

Prouver la stabilité: méthode de Lyapunov

Une fonction V est une fonction de Lyapunov si:

- $V(\mathbf{u}) \iff |\mathbf{u}|_X$ (équivalence avec la norme des perturbations)
- $\frac{dV(\mathbf{u}(t))}{dt} \leq -\gamma V(\mathbf{u}(t))$ (décroissance exponentielle)

S'il existe une fonction de Lyapunov, **le système est stable !**

Méthode abondamment utilisée depuis des décennies en dimension finie et infinie.

→ Trouver la fonction de Lyapunov.

Un résultat général dans H^2

Théorème (G. Bastin, J-M. Coron, 2016)

*Le système est exponentiellement stable pour la norme H^2 s'il existe:
 $Q \in C^1([0, L], D_{n+})$ telle que:*

- **(condition intérieure)** *la matrice*

$$-Q'(x)\Lambda(x) + Q(x)M(0, x) + M(0, x)^T Q(x)^T \quad (2)$$

est définie positive pour tout $x \in [0, L]$.

- **(condition aux bords)** *et la matrice:*

$$\begin{pmatrix} \Lambda_+(L)Q_+(L) & 0 \\ 0 & -\Lambda_-(0)Q_-(0) \end{pmatrix} - G'(0)^T \begin{pmatrix} \Lambda_+(0)Q_+(0) & 0 \\ 0 & -\Lambda_-(L)Q_-(L) \end{pmatrix} G'(0)^T \quad (3)$$

est positive.

Deux conditions:

- une condition intérieure qui donne un $L_{\max}$
- une condition aux bords sur les contrôles quand en dessous de $L_{\max}$

Un résultat général dans C^1

Théorème (A.H. 2017)

Le système est exponentiellement stable pour la norme C^1 si:

- *(Condition intérieure) le système:*

$$f'_i = -\frac{2}{\Lambda_i} \left(\sum_{k=1, k \neq i}^n |M_{ik}(0, x)| \frac{f_i^{3/2}}{\sqrt{f_k}} - M_{ii}(0, x) f_i \right) \quad (4)$$

admet une solution $(f_1, \dots, f_n)$ on $[0, L]$ telle que pour tout $i \in [1, n]$, $f_i > 0$

- *(Condition aux bords) avec $d_i = L$ si $\Lambda_i > 0$ et $d_i = 0$ sinon.*

$$\rho_\infty(G'(0))^2 < \frac{\inf_i \left(\frac{f_i(d_i)}{\Delta_i^2} \right)}{\sup_i \left(\frac{f_i(L-d_i)}{\Delta_i^2} \right)}$$

- Une norme plus difficile à manier...
- ... mais deux conditions similaires à nouveau.

Pourquoi est-ce que la norme C^1 est plus dure à manier?

- Basic Lyapunov function pour la norme H^2 :

$$\int_0^L f(x)u^2 + f(x)u_x^2 + f(x)u_{xx}^2 dx \quad (5)$$

→ Facile à dériver

- Basic Lyapunov function pour la norme C^1 :

$$\sup_{[0,L]} |f(x)u(t,x)| + \sup_{[0,L]} |f(x)u_x(t,x)| \quad (6)$$

→ Plus difficile à manier

Pourquoi est-ce que la norme C^1 est plus dure à manier?

- Basic Lyapunov function pour la norme H^2 :

$$\int_0^L f(x)u^2 + f(x)u_x^2 + f(x)u_{xx}^2 dx \quad (5)$$

→ Facile à dériver

- Basic Lyapunov function pour la norme C^1 :

$$\sup_{[0,L]} |f(x)u(t,x)| + \sup_{[0,L]} |f(x)u_x(t,x)| \quad (6)$$

→ Plus difficile à manier

Idée: utiliser plutôt

$$\left(\int_0^L f(x)u^{2p} dx \right)^{1/p} + \left(\int_0^L f(x)u_x^{2p} dx \right)^{1/p} \quad (7)$$

trouver un résultat vrai pour p suffisamment large puis $p \rightarrow +\infty$.

Equivalence entre les stabilités C^1 and H^2 ?

Faux en général (J-M. Coron, H-M. Nguyen, 2016)...

...mais

Theorem (A.H. 2017)

S'il existe une basic Lyapunov function C^1 alors il existe un contrôle aux bords tel qu'il existe a basic Lyapunov function pour la norme H^2 .

Par ailleurs, si les coefficients couplés du terme source ont le même signe, alors la réciproque est vraie.

Sommaire

- 1 Systèmes hyperboliques en général
- 2 Equations de Saint-Venant inhomogènes
- 3 Stabilisation d'états stationnaires avec choc
- 4 Contrôles Proportionnels-Integraux (PI)

Stabilisation des équations de Saint-Venant inhomogènes

Equations de Saint-Venant générales (section constante)

$$\partial_t H + \partial_x (HV) = 0,$$

$$\partial_t V + \partial_x \left(\frac{V^2}{2} + gH \right) - \underbrace{S_b(x)}_{\text{pente}} + \underbrace{S_f(H, V, x)}_{\text{frottements}} = 0.$$



- Modélise les écoulements de faible profondeur (voies navigables, atmosphère, etc.)
- Approx. Navier-Stokes

Stabilisation des équations de Saint-Venant inhomogènes

Equations de Saint-Venant générales

$$\begin{aligned}\partial_t A + \partial_x(AV) &= 0, \\ \partial_t(AV) + \partial_x(AV^2) \\ + gA(\partial_x H - S_b(x) + S_f(A, V, x)) &= 0.\end{aligned}$$



- Modélise les écoulements de faible profondeur (voies naviguables, atmosphère, etc.)
- Approx. Navier-Stokes

Etats-stationnaires non-uniformes en général

$$\partial_x V^* = V^{*2} \frac{S_f(H^*, Q^*, x) - S_b(x)}{gQ^* - V^{*3}} \text{ sur } [0, L]$$
$$Q^* = Q_0$$

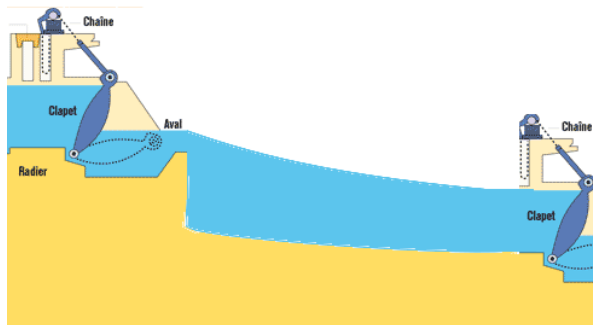
- Une **longueur limite** du domaine de stabilité avec contrôles aux bords, une **borne sur la taille** du terme source?
(ex: V. Dos Santos, C. Prieur, etc.)
- Un cas sans limite: cas sans pente (Bastin, Coron, 2017)

Contrôles les plus simples possibles:

$$v(t, 0) = k_0 h(t, 0)$$

et

$$v(t, L) = k_L h(t, L)$$



Contrôles les plus simples possibles:

$$v(t, 0) = k_0 h(t, 0)$$

et

$$v(t, L) = k_L h(t, L)$$

Théorème (A.H., P. Shang, 2017)

Si

$$k_0 \in \left(-\frac{g}{V^*(0)}, -\frac{V^*(0)}{H^*(0)} \right), \quad (8)$$

$$\text{et } k_L \in \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{g}{V^*(L)}, -\frac{V^*(L)}{H^*(L)} \right].$$

alors les équations de Saint-Venant avec pente et frottements sont exponentiellement stable pour la norme H^2 .

Remarquable:

- Aucune borne sur la taille du domaine, ni sur les termes sources.
- Ne dépend pas du modèle de frottement choisi $S_f(H, Q, x)$ ni de la pente S_b .

Contrôles les plus simples possibles:

$$v(t, 0) = k_0 h(t, 0)$$

et

$$v(t, L) = k_L h(t, L)$$

Théorème (A.H., P. Shang, 2017)

Si

$$k_0 \in \left(-\frac{g}{V^*(0)}, -\frac{V^*(0)}{H^*(0)} \right), \quad (8)$$

$$\text{et } k_L \in \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{g}{V^*(L)}, -\frac{V^*(L)}{H^*(L)} \right].$$

alors les équations de Saint-Venant avec pente et frottements sont exponentiellement stable pour la norme H^2 .

Remarquable:

- Aucune borne sur la taille du domaine, ni sur les termes sources.
- Ne dépend pas du modèle de frottement choisi $S_f(H, Q, x)$ ni de la pente S_b .

→ On ignore quasiment tout sur le système

Derrière la preuve

Une entropie locale:

$$\eta = g(H^*, V^*, C) \begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} g & V^* \\ V^* & H^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix}$$

Derrière la preuve

Une entropie locale:

$$\eta = g(H^*, V^*, C) \begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} g & V^* \\ V^* & H^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix}$$

- Entropie convexe
- Quadratique

Pas n'importe quelle entropie:

$$\partial_t \eta + \partial_x (Q_\eta) \leq 0 \text{ (création d'entropie)}$$

Derrière la preuve

Une entropie locale:

$$\eta = g(H^*, V^*, C) \begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} g & V^* \\ V^* & H^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix}$$

- Entropie convexe
- Quadratique

Pas n'importe quelle entropie:

$$\partial_t \eta + \partial_x (Q_\eta) \leq 0 \text{ (création d'entropie)}$$

$$\partial_t \eta + \partial_x (Q_\eta) = 0 \text{ si } Q(x, t) = Q^*$$

Derrière la preuve

Pas n'importe quelle entropie:

$$\partial_t \eta + \partial_x(Q_\eta) \leq 0 \text{ (création d'entropie)}$$

$$\partial_t \eta + \partial_x(Q_\eta) = 0 \text{ (si } Q(x, t) = Q^*)$$

Point de vue Lyapunov:

$$V = \int_0^L f_1(x) h^2(t, x) + f_2(x) h(t, x) v(t, x) + f_3(x) v^2(t, x) dx$$

$$\frac{dV}{dt} = -\text{termes de bords} - \int_0^L \begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix}^T M \begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix}$$

- Condition sur M : définie positive. Dans le cas limite: on retrouve η .
- Remarquable: η explicite (pas du tout évident a priori).

Sommaire

- 1 Systèmes hyperboliques en général
- 2 Equations de Saint-Venant inhomogènes
- 3 Stabilisation d'états stationnaires avec choc**
- 4 Contrôles Proportionnels-Integraux (PI)

Stabilisation des équations de Saint-Venant avec choc

Equations de Saint-Venant

$$\partial_t H + \partial_x Q = 0,$$

$$\partial_t Q + \partial_x \left(\frac{gH^2}{2} + \frac{Q^2}{H} \right) = 0,$$

- Modèle sans pente ni frottement (deux problèmes relativement différents)
- $Q = HV$ le flux, plutôt que V (continuité).

Stabilisation des équations de Saint-Venant avec choc

Equations de Saint-Venant

$$\partial_t H + \partial_x Q = 0,$$

$$\partial_t Q + \partial_x \left(\frac{gH^2}{2} + \frac{Q^2}{H} \right) = 0,$$

Un phénomène de choc: le ressaut hydraulique

- passage régime torrentiel → fluvial
- Une vitesse caractéristique change de signe ($V - \sqrt{gH}$)



Stabilisation des équations de Saint-Venant avec choc

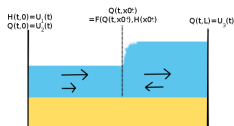
Equations de Saint-Venant

$$\partial_t H + \partial_x Q = 0,$$

$$\partial_t Q + \partial_x \left(\frac{gH^2}{2} + \frac{Q^2}{H} \right) = 0,$$

Un phénomène de choc: le ressaut hydraulique

- passage régime torrentiel $\rightarrow$ fluvial
- Une vitesse caractéristique change de signe ($V - \sqrt{gH}$)



Nos contrôles: les installations fluviales en 0 et en L .

Stabilisation des équations de Saint-Venant avec choc

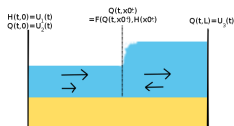
Equations de Saint-Venant

$$\partial_t H + \partial_x Q = 0,$$

$$\partial_t Q + \partial_x \left(\frac{gH^2}{2} + \frac{Q^2}{H} \right) = 0,$$

Un phénomène de choc: le ressaut hydraulique

- passage régime torrentiel $\rightarrow$ fluvial
- Une vitesse caractéristique change de signe ($V - \sqrt{gH}$)



Nos contrôles: les installations fluviales en 0 et en L .

Complicé: regardons d'abord un système plus simple

Système plus simple

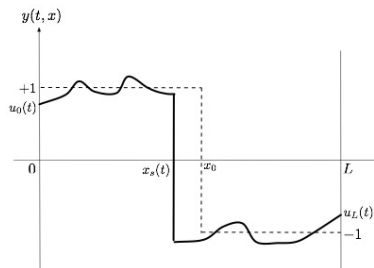
Equation de Burgers

$$y_t(t, x) + y(t, x)y_x(t, x) = 0$$

Conditions aux bords

$$y(t, 0^+) = u_0(t)$$

$$y(t, L^-) = u_L(t).$$



Etat stationnaire à stabiliser:

$$y = 1 \text{ pour } x \in (0, x_0)$$

$$y = -1 \text{ pour } x \in (x_0, L)$$

Contrôles les plus simples possibles:

$$u_0(t) = k_1 y(t, x_s(t)^-) + b_1(x_0 - x_s(t)) + (1 - k_1),$$

$$u_L(t) = k_2 y(t, x_s(t)^+) + b_2(x_0 - x_s(t)) - (1 - k_2).$$

Un problème bien posé:

Théorème (G. Bastin, J-M. Coron, A.H., P. Shang, 2017)

Pour tout $T > 0$, il existe $\delta(T) > 0$ tel que, si $x_{s0} \in (0, L)$ et $y_0 \in H^2((0, x_{s0}); \mathbb{R}) \cap H^2((x_{s0}, L); \mathbb{R})$ sont compatibles et vérifient

$$\begin{aligned} |y_0 - 1|_{H^2((0, x_{s0}); \mathbb{R})} + |y_0 + 1|_{H^2((x_{s0}, L); \mathbb{R})} &\leq \delta, \\ |x_{s0} - x_0| &\leq \delta, \end{aligned}$$

alors le système a une unique solution C^1 par morceaux entropique $y \in C^0([0, T]; H^2((0, x_s(t)); \mathbb{R})) \cap H^2((x_s(t), L); \mathbb{R}))$, et on a l'estimée:

$$\begin{aligned} &|y(t, \cdot) - 1|_{H^2((0, x_s(t)); \mathbb{R})} + |y(t, \cdot) + 1|_{H^2((x_s(t), L); \mathbb{R})} + |x_s(t) - x_0| \\ &\leq C(T) (|y_0 - 1|_{H^2((0, x_{s0}); \mathbb{R})} + |y_0 + 1|_{H^2((x_{s0}, L); \mathbb{R})} + |x_{s0} - x_0|). \end{aligned}$$

Transformation du problème

Problème: gérer le choc.

Divisons le problème en deux:

$$\partial_t y_1 + y_1 \partial_x y_1 = 0 \text{ sur } (0, x_s(t))$$

$$\partial_t y_2 + y_2 \partial_x y_2 = 0 \text{ sur } (x_s(t), L)$$

Isolons les perturbations par rapport aux amplitudes stationnaires:

$$u_1 = y_1 - 1 \text{ et } u_2 = y_2 - (-1).$$

$$\partial_t u_1 + (1 + u_1) \partial_x u_1 = 0 \text{ sur } (0, x_s(t))$$

$$\partial_t u_2 + (u_2 - 1) \partial_x u_2 = 0 \text{ sur } (x_s(t), L)$$

Dynamique du choc (Rankine-Hugoniot):

$$\dot{x}_s = \frac{u_1(x_s(t)) + u_2(x_s(t))}{2}$$

→ Un système classique, mais un domaine variable.

Transformation du problème

Une deuxième transformation: un changement d'échelle

$$z_1(t, x) = u_1\left(t, x \frac{x_s(t)}{x_0}\right),$$

$$z_2(t, x) = u_2\left(t, L + x \frac{x_s(t) - L}{x_0}\right)$$

Notre système équivalent:

$$\partial_t z_1 + \left(1 + z_1 - x \frac{\dot{x}_s}{x_0}\right) \partial_x z_1 \frac{x_0}{x_s} = 0,$$

$$\partial_t z_2 + \left(1 - z_2 + x \frac{\dot{x}_s}{x_0}\right) \partial_x z_2 \frac{x_0}{L - x_s} = 0, \text{ sur } (0, x_0)$$

$$\dot{x}_s(t) = \frac{z_1(t, x_0) + z_2(t, x_0)}{2},$$

Une équation scalaire avec choc $\rightarrow$ un système 2×2 strictement hyperbolique couplé à une ODE et régulier.

Transformation du problème

Notre nouveau problème:

$$\partial_t z_1 + \left(1 + z_1 - x \frac{\dot{x}_s}{x_0}\right) \partial_x z_1 \frac{x_0}{x_s} = 0,$$

$$\partial_t z_2 + \left(1 - z_2 + x \frac{\dot{x}_s}{x_0}\right) \partial_x z_2 \frac{x_0}{L - x_s} = 0,$$

$$\dot{x}_s(t) = \frac{z_1(t, x_0) + z_2(t, x_0)}{2},$$

Les contrôles aux bords

$$z_1(t, 0) = k_1 z_1(t, x_0) + b_1(x_0 - x_s(t)),$$

$$z_2(t, 0) = k_2 z_2(t, x_0) + b_2(x_0 - x_s(t)),$$

- 2 EDP sans termes sources, 2 contrôles aux bords: stabiliser seulement z_1 et z_2 assez simple.

Stabiliser z_1 et z_2 , cas simplifié (linéaire):

Fonction de Lyapunov: $V = \int_0^{x_0} z_1^2(t, x) + z_2^2(t, x) dx$

$$\begin{aligned}
 \frac{dV}{dt} &= \int_0^{x_0} 2z_1 \partial_t z_1 + 2z_2 \partial_t z_2 dx \\
 &= - \int_0^{x_0} 2z_1 \partial_x z_1 \frac{x_0}{x_s} + 2z_2 \partial_x z_2 \frac{x_0}{L - x_s} dx \\
 &= - \left[z_1^2 \frac{x_0}{x_s} + z_2^2 \frac{x_0}{L - x_s} \right]_0^{x_0} \\
 &= - \left(\frac{x_0}{x_s} - k_1^2 \frac{x_0}{L - x_s} \right) z_1^2(t, x_0) - \left(\frac{x_0}{L - x_s} - k_2^2 \frac{x_0}{x_s} \right) z_2^2(t, x_0) < 0
 \end{aligned}$$

- La difficulté n'est pas là (non-linéaire à peine plus compliqué)
- Difficulté: stabiliser x_s en même temps, pas de contrôle direct sur x_s .

Stabiliser z_1 et z_2 , cas simplifié (linéaire):

Fonction de Lyapunov: $V = \int_0^{x_0} z_1^2(t, x) + z_2^2(t, x) dx$

$$\begin{aligned}
 \frac{dV}{dt} &= \int_0^{x_0} 2z_1 \partial_t z_1 + 2z_2 \partial_t z_2 dx \\
 &= - \int_0^{x_0} 2z_1 \partial_x z_1 \frac{x_0}{x_s} + 2z_2 \partial_x z_2 \frac{x_0}{L - x_s} dx \\
 &= - \left[z_1^2 \frac{x_0}{x_s} + z_2^2 \frac{x_0}{L - x_s} \right]_0^{x_0} \\
 &= - \left(\frac{x_0}{x_s} - k_1^2 \frac{x_0}{L - x_s} \right) z_1^2(t, x_0) - \left(\frac{x_0}{L - x_s} - k_2^2 \frac{x_0}{x_s} \right) z_2^2(t, x_0) < 0
 \end{aligned}$$

- La difficulté n'est pas là (non-linéaire à peine plus compliqué)
- Difficulté: stabiliser x_s en même temps, pas de contrôle direct sur x_s .

→ Utiliser le couplage.

Une nouvelle fonction de Lyapunov

- Pénaliser le fait que le choc n'ait pas lieu en x_0 .

Une nouvelle fonction de Lyapunov

- Pénaliser le fait que le choc n'ait pas lieu en x_0 .

Première idée naturelle:

$$\int_0^L p_1 z_1^2(t, x) + p_2 z_2^2(t, x) dx + k \cdot (x_s - x_0)^2$$

Une nouvelle fonction de Lyapunov

- Pénaliser le fait que le choc n'ait pas lieu en x_0 .

Première idée naturelle:

$$\int_0^L p_1 z_1^2(t, x) + p_2 z_2^2(t, x) dx + k \cdot (x_s - x_0)^2$$

$k > 0$, terme usuel en dimension finie.

Une nouvelle fonction de Lyapunov

- Pénaliser le fait que le choc n'ait pas lieu en x_0 .

Première idée naturelle:

$$\int_0^L p_1 z_1^2(t, x) + p_2 z_2^2(t, x) dx + k \cdot (x_s - x_0)^2$$

$k > 0$, terme usuel en dimension finie.

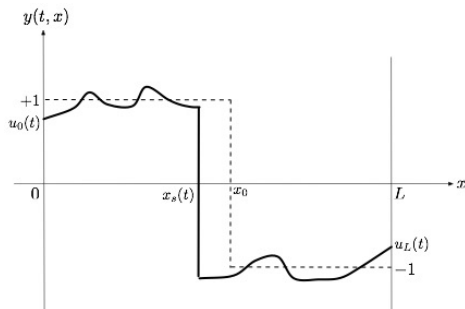
Problème:

$$\frac{d}{dt} ((x_s - x_0)^2) = 2 (z_1(x_0) + z_2(x_0)) (x_s - x_0)$$

→ Ne fait pas intervenir les contrôles.

Une nouvelle fonction de Lyapunov

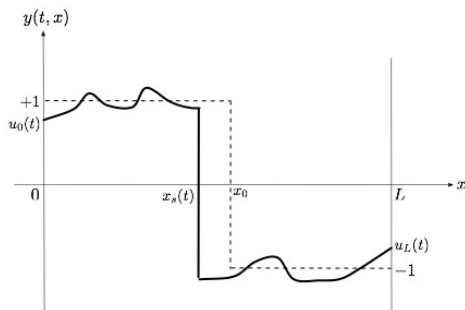
Deuxième idée:



Stabiliser l'aire sous la courbe

Une nouvelle fonction de Lyapunov

Deuxième idée:

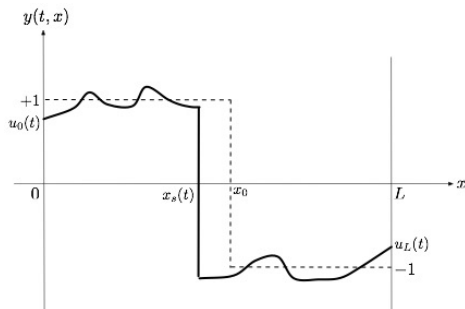


Stabiliser l'aire sous la courbe

$$\left(\int_0^L y - y^* dx \right)^2$$

Une nouvelle fonction de Lyapunov

Deuxième idée:



Stabiliser l'aire sous la courbe

$$\left(\int_0^L y - y^* dx \right)^2 \approx \left(\int_0^{x_0} z_1 dx + \int_0^{x_0} z_2 dx + 2(x_c - x_0) \right)^2$$

Une nouvelle fonction de Lyapunov

Deuxième idée (généralisée):

$$V = \int_0^L p_1 z_1^2 + p_2 z_2^2 dx + \left(\int_0^{x_0} p_1' z_1 + p_2' z_2 dx + 2(x_c - x_0) \right)^2$$

Une nouvelle fonction de Lyapunov

Deuxième idée (généralisée):

$$V = \int_0^L p_1 z_1^2 + p_2 z_2^2 dx + \left(\int_0^{x_0} p_1' z_1 + p_2' z_2 dx + 2(x_c - x_0) \right)^2$$

- En pratique: limite sur le taux de décroissance exponentielle.

Une nouvelle fonction de Lyapunov

Deuxième idée (généralisée):

$$V = \int_0^L p_1 z_1^2 + p_2 z_2^2 dx + \left(\int_0^{x_0} p'_1 z_1 + p'_2 z_2 dx + 2(x_c - x_0) \right)^2$$

- En pratique: limite sur le taux de décroissance exponentielle.

Un peu plus loin:

$$\begin{aligned} V = & \int_0^L p_1 z_1^2 + p_2 z_2^2 dx \\ & + \int_0^{x_0} p'_1 z_1 (x_s - x_0) dx + \int_0^{x_0} p'_2 z_2 (x_s - x_0) dx + \kappa (x_s - x_0)^2 \end{aligned}$$

Une nouvelle fonction de Lyapunov

Deuxième idée (généralisée):

$$V = \int_0^L p_1 z_1^2 + p_2 z_2^2 dx + \left(\int_0^{x_0} p'_1 z_1 + p'_2 z_2 dx + 2(x_c - x_0) \right)^2$$

- En pratique: limite sur le taux de décroissance exponentielle.

Un peu plus loin:

$$\begin{aligned} V = & \int_0^L p_1 z_1^2 + p_2 z_2^2 dx \\ & + \int_0^{x_0} p'_1 z_1 (x_s - x_0) dx + \int_0^{x_0} p'_2 z_2 (x_s - x_0) dx + \kappa (x_s - x_0)^2 \end{aligned}$$

- Taux de décroissance exponentielle arbitraire.

Théorème (G. Bastin, J-M. Coron, A.H., P. Shang, 2017)

Soit $\gamma > 0$. Si les conditions suivantes sont vérifiées:

$$b_1 \in \left(\gamma e^{-\gamma x_0}, \frac{\gamma e^{-\gamma x_0}}{1 - e^{-\gamma x_0}} \right), \quad b_2 \in \left(\gamma e^{-\gamma(L-x_0)}, \frac{\gamma e^{-\gamma(L-x_0)}}{1 - e^{-\gamma(L-x_0)}} \right), \quad (9a)$$

$$k_1^2 < e^{-\gamma x_0} \left(1 - \frac{b_1}{\gamma} \left(b_1 \frac{1 - e^{-\gamma x_0}}{\gamma e^{-\gamma x_0}} + b_2 \frac{1 - e^{-\gamma(L-x_0)}}{\gamma e^{-\gamma(L-x_0)}} \right) \right), \quad (9b)$$

$$k_2^2 < e^{-\gamma(L-x_0)} \left(1 - \frac{b_2}{\gamma} \left(b_1 \frac{1 - e^{-\gamma x_0}}{\gamma e^{-\gamma x_0}} + b_2 \frac{1 - e^{-\gamma(L-x_0)}}{\gamma e^{-\gamma(L-x_0)}} \right) \right), \quad (9c)$$

alors l'état stationnaire est exponentiellement stable pour la norme H^2 avec un taux de décroissance $\gamma/4$.

- Existe toujours des paramètres convenables.
- Contrôles très simples. Si plus de liberté sur le contrôle: conditions plus simples.

Retour à Saint-Venant

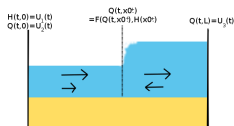
Equations de Saint-Venant

$$\partial_t H + \partial_x Q = 0,$$

$$\partial_t Q + \partial_x \left(\frac{gH^2}{2} + \frac{Q^2}{H} \right) = 0,$$

Un phénomène de choc: le ressaut hydraulique

- passage régime torrentiel $\rightarrow$ fluvial
- Une vitesse caractéristique change de signe ($V - \sqrt{gH}$)



Nos contrôles: les installations fluviales en 0 et en L .

Retour à Saint-Venant

Equations de Saint-Venant

$$\begin{aligned}\partial_t H + \partial_x Q &= 0, \\ \partial_t Q + \partial_x \left(\frac{gH^2}{2} + \frac{Q^2}{H} \right) &= 0,\end{aligned}$$

Même méthode que pour Burgers?

Retour à Saint-Venant

Equations de Saint-Venant

$$\begin{aligned}\partial_t H + \partial_x Q &= 0, \\ \partial_t Q + \partial_x \left(\frac{gH^2}{2} + \frac{Q^2}{H} \right) &= 0,\end{aligned}$$

Même méthode que pour Burgers? Oui mais pas direct

Stabilisation des équations de Saint-Venant avec choc

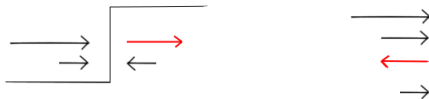
Une difficulté supplémentaire:

Equation de Burgers:



2 équations couplées à une ODE, 2 contrôles

Equations de Saint-Venant:



→ 4 equations couplées à une ODE, 3 contrôles.

Stabilisation des équations de Saint-Venant avec choc

Théorème (G. Bastin, J-M. Coron, A.H., P. Shang, 2018)

Soit un état-stationnaire (H^*, Q^*, x_0) compatible, pour tout $\gamma > 0$, si pour $i = 1, 2, 3$

$$b_i \in \left(\frac{-\gamma e^{-\frac{\gamma}{x_i \lambda_i} x_0}}{3ds_i \left(1 - s_i \frac{\lambda_i}{\lambda_4}\right) (1 - e^{-\frac{\gamma}{x_i \lambda_i} x_0})}, \frac{-\gamma e^{-\frac{\gamma}{x_i \lambda_i} x_0}}{3ds_i \left(1 - s_i \frac{\lambda_i}{\lambda_4}\right)} \right),$$

et si la matrice

$$D(x_0) - K^T D(0) K - \left(\sum_{k=1}^3 \frac{2d^2}{\gamma^2} b_k s_k (1 - s_k \frac{\lambda_k}{\lambda_4}) (e^{\frac{\gamma x_0}{x_k \lambda_k}} - 1) \right) \tilde{D}$$

est définie positive, alors (H^*, Q^*, x_0) est exponentiellement stable pour la norme H^2 avec un taux de décroissance $\gamma/4$.

Sommaire

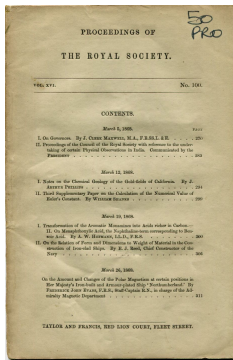
- 1 Systèmes hyperboliques en général
- 2 Equations de Saint-Venant inhomogènes
- 3 Stabilisation d'états stationnaires avec choc
- 4 Contrôles Proportionnels-Intégraux (PI)**

Contrôles Proportionnels-Intégraux

Un vieil outil, découvert par les frères Perier au 18ème siècle, étudié par Jenkin, Maxwell, Watt, etc.

Contrôles Proportionnels-Intégraux

Un vieil outil, découvert par les frères Perier au 18ème siècle, étudié par Jenkin, Maxwell, Watt, etc.



Contrôles Proportionnels-Intégraux

Un vieil outil, découvert par les frères Perier au 18ème siècle, étudié par Jenkin, Maxwell, Watt, etc.

puis Minorsky au début du 20ème siècle.



Contrôles Proportionnels-Intégraux

En quoi ça consiste?

$$v(t, 0) = k_1 h(t, 0), \quad v(t, L) = k_2 h(t, L) \quad (10)$$

remplacé par

$$v(t, L) = \underbrace{k_p h(t, L)}_{\text{proportional}} - \underbrace{k_I \int_0^t h(\tau, L) d\tau + C}_{\text{integral}} \quad (11)$$

Très utilisé dans les applications industrielles:

- Très robuste aux erreurs d'off-set
- Nécessite seulement un contrôle (au lieu de deux).

Contrôles aux bords Proportionnels-Intégraux

... mais difficile à manier mathématiquement:

- résultats linéaires qui utilisent un spectral mapping theorem
- Peu de résultats pour les problèmes non-linéaires en dimension infinie.

Exemple: l'équation du transport

$$\partial_t u + \lambda(u) \partial_x u = 0$$

$$u(t, 0) = k \cdot u(t, L)$$

Condition de stabilité optimale : $|k| < 1$ (très simple)

Contrôles aux bords Proportionnels-Intégraux

... mais difficile à manier mathématiquement:

- résultats linéaires qui utilisent un spectral mapping theorem
- Peu de résultats pour les problèmes non-linéaires en dimension infinie.

Exemple: l'équation du transport

$$\partial_t u + \lambda(u) \partial_x u = 0$$

$$u(t, 0) = -k.X(t)$$

$$\dot{X}(t) = u(t, L)$$

Condition de stabilité optimale: $0 < k < \frac{\pi \lambda(0)}{2L}$ (≈ 20 pages)

Equation du transport avec contrôle PI - Méthode

$$0 \text{ ————— } \frac{\pi}{2}$$

Equation du transport avec contrôle PI - Méthode



Equation du transport avec contrôle PI - Méthode



Equation du transport avec contrôle PI - Méthode


$$0 \text{ --- } \overset{V}{\text{---}} \underset{1}{\text{---}} \text{---} \frac{\pi}{2}$$

Problème linéaire: deux valeurs propres limitantes λ_1 and $\bar{\lambda}_1$, gap entre les valeurs propres.

→ Idée: extraire la partie correspondant à ces valeurs propres avec un projecteur p .

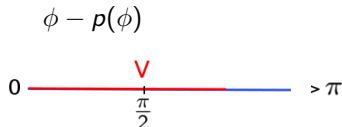
Equation du transport avec contrôle PI - Méthode



Problème linéaire: deux valeurs propres limitantes λ_1 and $\bar{\lambda}_1$, gap entre les valeurs propres.

→ Idée: extraire la partie correspondant à ces valeurs propres avec un projecteur p .

$p(\phi)$
dimension finie
limite de stabilité: $\frac{\pi}{2}$



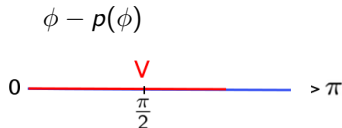
Equation du transport avec contrôle PI - Méthode



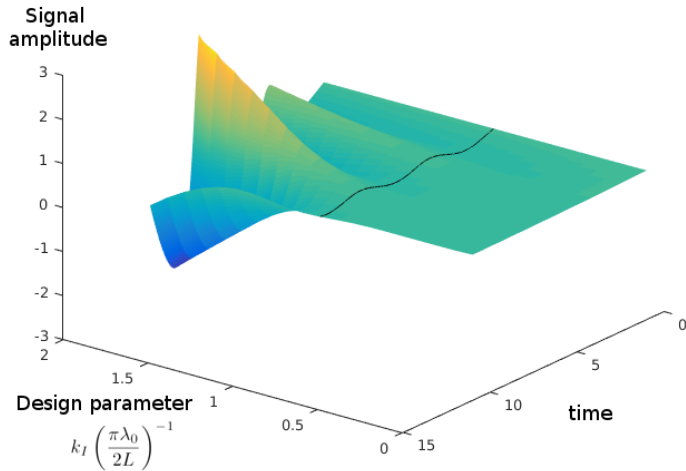
Problème linéaire: deux valeurs propres limitantes λ_1 and $\bar{\lambda}_1$, gap entre les valeurs propres.

→ Idée: extraire la partie correspondant à ces valeurs propres avec un projecteur p .

$p(\phi)$
dimension finie
limite de stabilité: $\frac{\pi}{2}$



→ limite totale: $\frac{\pi}{2}$



Contrôles aux bords Proportionnels-Intégraux

- Très compliqué pour l'équation de transport homogène.
- Horrible pour les équations de Saint-Venant?

Contrôles aux bords Proportionnels-Intégraux

- Très compliqué pour l'équation de transport homogène.
- Horrible pour les équations de Saint-Venant?

Non, grâce à **notre entropie locale η**

Théorème (A.H. 2018)

L'état stationnaire (H^, V^*) est exponentiellement stable pour la norme H^2 si:*

$$k_p > 0 \text{ and } k_I > 0.$$

Contrôles aux bords Proportionnels-Intégraux

- Très compliqué pour l'équation de transport homogène.
- Horrible pour les équations de Saint-Venant?

Non, grâce à **notre entropie locale η**

Théorème (A.H. 2018)

L'état stationnaire (H^, V^*) est exponentiellement stable pour la norme H^2 si:*

$$k_p > 0 \text{ and } k_I > 0.$$

Condition nécessaire?

Contrôles aux bords Proportionnels-Intégraux

- Très compliqué pour l'équation de transport homogène.
- Horrible pour les équations de Saint-Venant?

Non, grâce à **notre entropie locale η**

Théorème (A.H. 2018)

L'état stationnaire (H^, V^*) est exponentiellement stable pour la norme H^2 si:*

$$k_p > 0 \text{ and } k_I > 0.$$

Condition nécessaire?

Fin d'une série de nombreux travaux?
(Dos Santos, Prieur, Bastin, Coron etc.)

Conclusion

- Quelques résultats généraux pour les systèmes hyperboliques.
- Une entropie locale pour l'équation de Saint-Venant qui permet de gérer les termes sources.
- Une méthode de stabilisation pour les états stationnaires avec un choc.

Interprétation physique de cette entropie locale?

Solutions ou états stationnaires seulement BV

Contrôles PI: en général?

Stabilisation de systèmes hyperboliques pour la norme C^1 :

- *Exponential stability of general 1-D quasilinear systems with source terms for the C^1 norm under boundary conditions*
- *On boundary stability of inhomogeneous 2×2 1-D hyperbolic systems for the C^1 norm*

Stabilisation des équations de Saint-Venant inhomogènes

- *A quadratic Lyapunov function for Saint-Venant equations with arbitrary friction and space-varying slope (avec Peipei Shang)*

Stabilisation des équations de Burgers et Saint-Venant avec choc:

- *Exponential boundary feedback stabilization of a shock steady state for the inviscid Burgers equation*
(avec Georges Bastin, Jean-Michel Coron and Peipei Shang).
- *Boundary feedback stabilization of hydraulic jumps* (avec Georges Bastin, Jean-Michel Coron and Peipei Shang).

Contrôles PI

- *PI controller for the nonlinear transport equations* (avec J-M. Coron)
- *PI controller for the general Saint-Venant equations*

Merci pour votre attention

-

Des questions?