Diffraction électromagnétique par une couche mince de nanoparticules réparties aléatoirement : développement asymptotique, conditions effectives et simulations.

Séminaire des doctorants CERMICS - Mercredi 3 mai 2023

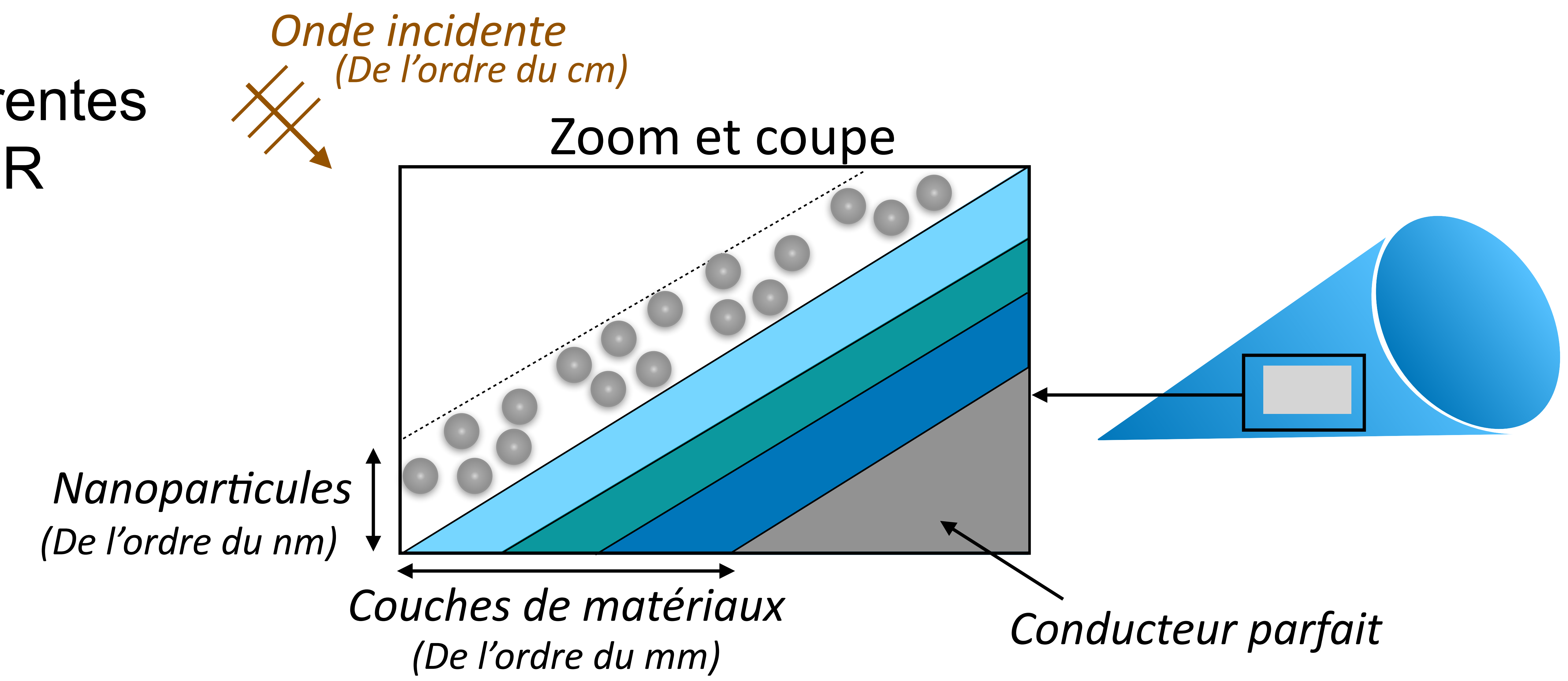
Amandine BOUCART

Travaux en collaboration avec :
Sonia Fliss *(ENSTA Paris/UMA/Poems)*,
Laure Giovangigli *(ENSTA Paris/UMA/Poems),*
Bruno Stupfel *(CEA/CESTA)*.

Motivation et objectifs

Nous étudions la diffraction électromagnétique en régime harmonique par un objet revêtu d'un empilement de différentes couches de matériaux qui est optimisé pour réduire la SER (Surface Equivalente Radar) de l'objet.

Par ailleurs, l'objet peut être recouvert d'une très fine couche de nanoparticules.



Objectif de ce travail : Quantifier l'impact de cette couche sur le champ diffracté.

Difficultés de l'étude

- Du fait des différentes échelles, la résolution numérique des équations de Maxwell est très coûteuse;
- La position des particules n'est a priori pas connue.

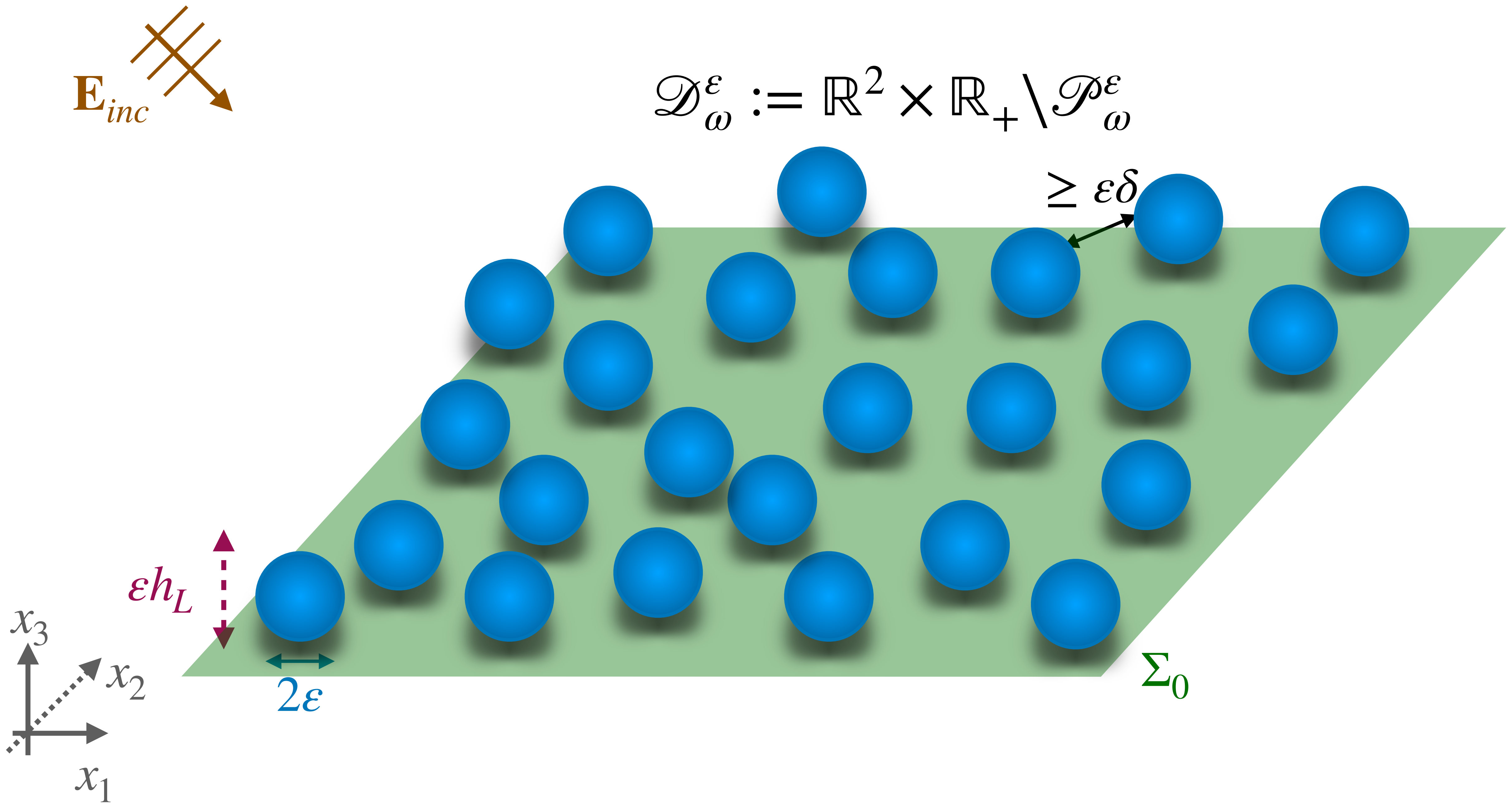
Nous allons proposer un modèle effectif où la couche de particules est remplacée par une condition aux limites équivalente dont les coefficients dépendent de la loi de distribution des particules. La résolution est moins coûteuse.

Présentation du modèle

- On néglige les courbures de l'objet en se plaçant dans l'approximation du plan local tangent.
- On modélise l'empilement de matériaux par une condition d'impédance sur une surface notée $\Sigma_0 := \{x_3 = 0\}$.

Le plan Σ_0 est recouvert d'une fine couche, de hauteur εh_L, d'un ensemble de particules $\mathscr{P}^\varepsilon_\omega$ identiques et de taille $\varepsilon \ll \lambda$.

- On note $\varepsilon\delta > 0$ la distance minimale entre les particules et le plan Σ_0.
- On suppose que les particules sont réparties aléatoirement suivant une loi de probabilité donnée.



Equations de Maxwell dans $\mathscr{D}^\varepsilon_\omega$

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{H}^\varepsilon_\omega - ik\mathbf{E}^\varepsilon_\omega = 0 \qquad \mathrm{div}\ \mathbf{E}^\varepsilon_\omega = 0$$

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{E}^\varepsilon_\omega + ik\mathbf{H}^\varepsilon_\omega = 0 \qquad \mathrm{div}\ \mathbf{H}^\varepsilon_\omega = 0$$

Condition d'impédance sur le plan Σ_0

$$\left(\overrightarrow{e_3} \times \mathbf{E}^\varepsilon_\omega\right) \times \overrightarrow{e_3} = \mathbf{Z}\ \overrightarrow{e_3} \times \mathbf{H}^\varepsilon_\omega\ , \quad \mathrm{Re}\left(\mathbf{Z}\right) > 0$$

Condition de conducteur parfait sur le bord des particules $\partial\mathscr{P}^\varepsilon_\omega$

$$\vec{n} \times \mathbf{E}^\varepsilon_\omega = 0 \qquad \vec{n} \cdot \mathbf{H}^\varepsilon_\omega = 0$$

Condition d'onde sortante pour $\mathbf{E}^\varepsilon_\omega - \mathbf{E}_{inc}$ et $\mathbf{H}^\varepsilon_\omega - \mathbf{H}_{inc}$

La solution $(\mathbf{E}^\varepsilon_\omega, \mathbf{H}^\varepsilon_\omega)$ est paramétrée par ε et par ω qui indique la dépendance en la distribution aléatoire des particules.

Etat de l'art

Il existe 2 méthodes pour construire des conditions effectives

Techniques d'optimisation sous contraintes

Optimisation des coefficients de la condition aux limites

Poget & Stupfel (2011),
J Hoppe (2018),
Lafitte, Payen & Stupfel (2021).

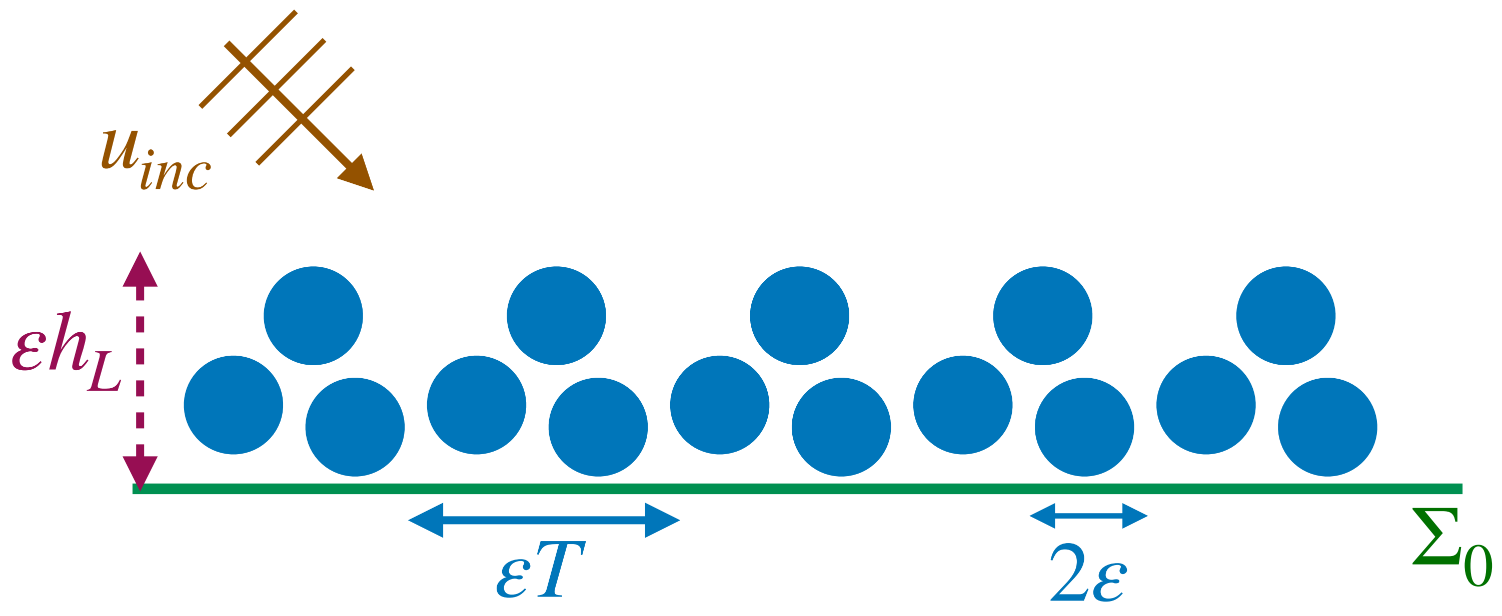
Techniques asymptotiques

Problèmes de diffraction par des couches minces homogènes

Bartoli & Bendali (2002),
Haddar & Joly (2002),
Vial (2003),
Caloz & Costabel & Dauge & Vial (2006),
Duruflé & Péron & Poignard(2014).

Problèmes de diffraction par des couches minces périodiques

Abboud & Ammari (1996),
Delourme (2010),
Delourme & Haddar & Joly (2012),
Claeys & Delourme (2013),
Péron & Schmidt & Duruflé (2016),
Marigo & Maurel (2016).



Etat de l'art

Il existe 2 méthodes basées sur des développements asymptotiques

Développements raccordés

Développement externe
(Variations lentes)

Zone intermédiaire

Développement interne
(Variations rapides)

Σ_0

Van Dyke (1975),
AM Il'lin (1992),
Joly & Tordeux (2006)
Claeys (2008),
Delourme (2010),
Claeys & Delourme (2013),
Maurel & Marigo (2016).

Développements multi-échelles composés

Développement global :
Partie externe + Correction interne

Σ_0

Maz'ya & Nazarov & Plamenevskii (2000),
Caloz & Costabel & Dauge & Vial (2006),
Brancherie & Dambrine & Vial &Villon (2008),
Basson & Gerard-Varet (2008)
Beneteau(2021).

La méthode que nous proposons se situe entre ces deux méthodes et est adaptée au cadre aléatoire

Etat de l'art

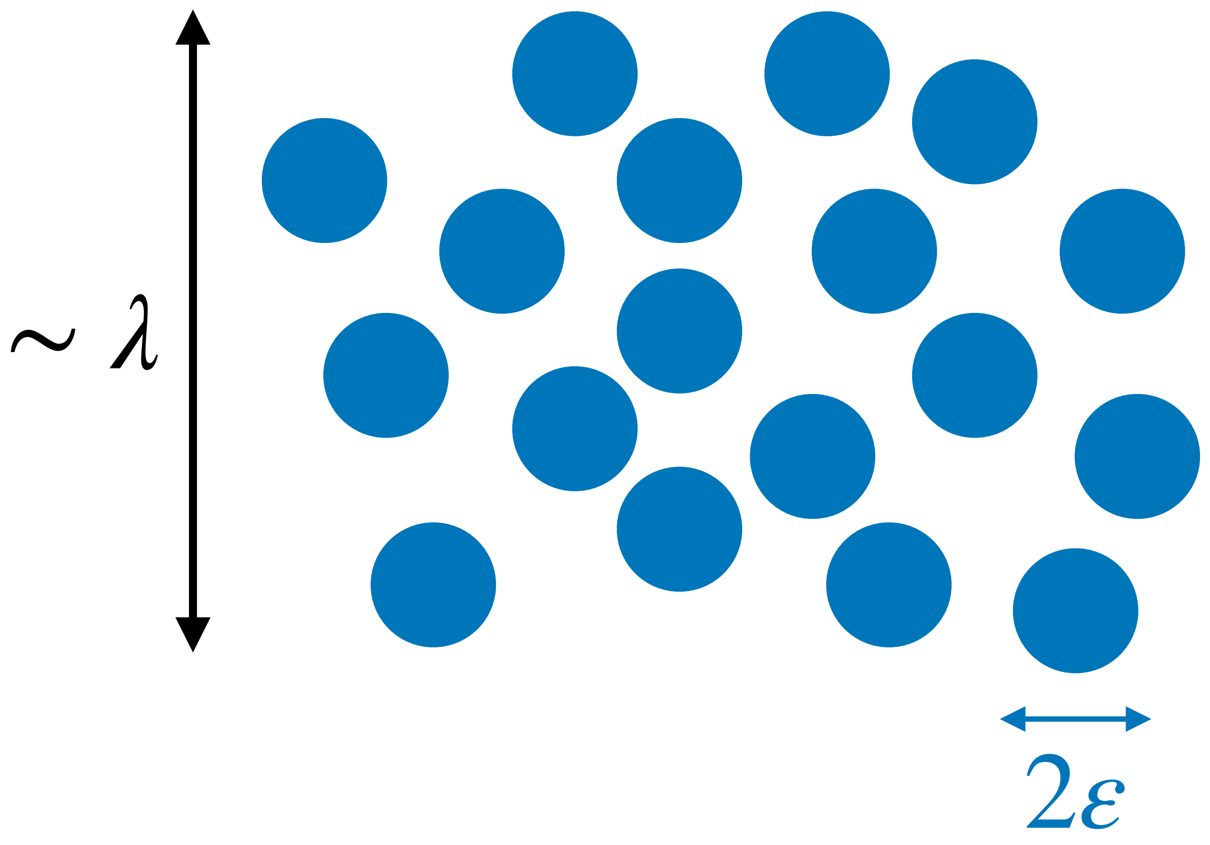
Il existe de nombreux travaux sur l'homogénéisation de volume pour des milieux aléatoires (équations elliptiques, équations de Stokes …)

Kozlov (1979-1987), Papanicolaou & Varadhan (1981),

Cottereau (2013), Blanc & Le Bris & Legoll (2016),

Amstrong & kuusi & mourrat (2019), Heida (2020),

Duerinckx & Gloria (2017, 2021), Gloria & Neukamm & Otto (2021).

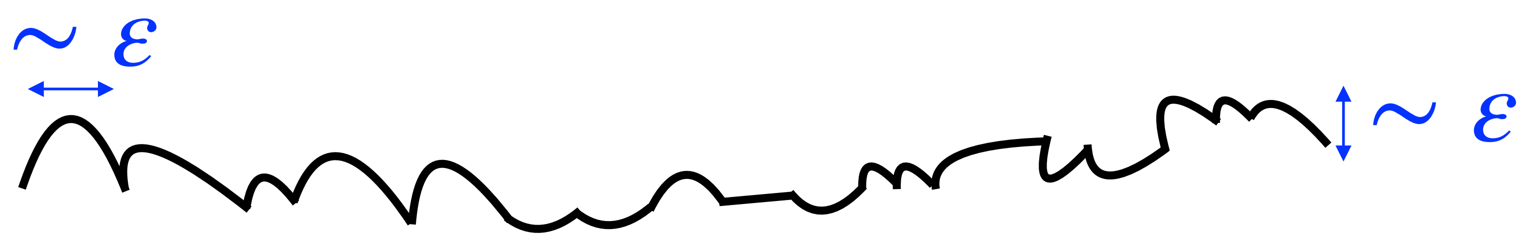


Les travaux qui nous semblent les plus proches de notre étude concernent l'étude des surfaces rugueuses (dans le contexte des équations de Stokes)

Chechkin (2009), Basson & Gérard-Varet (2008),

Gérard-Varet & Masmoudi (2010), Dalibard & Gérard-Varet (2011),

Amirat & Bodars & Checklin & Piatnitski (2011), El Jarroudi (2019).

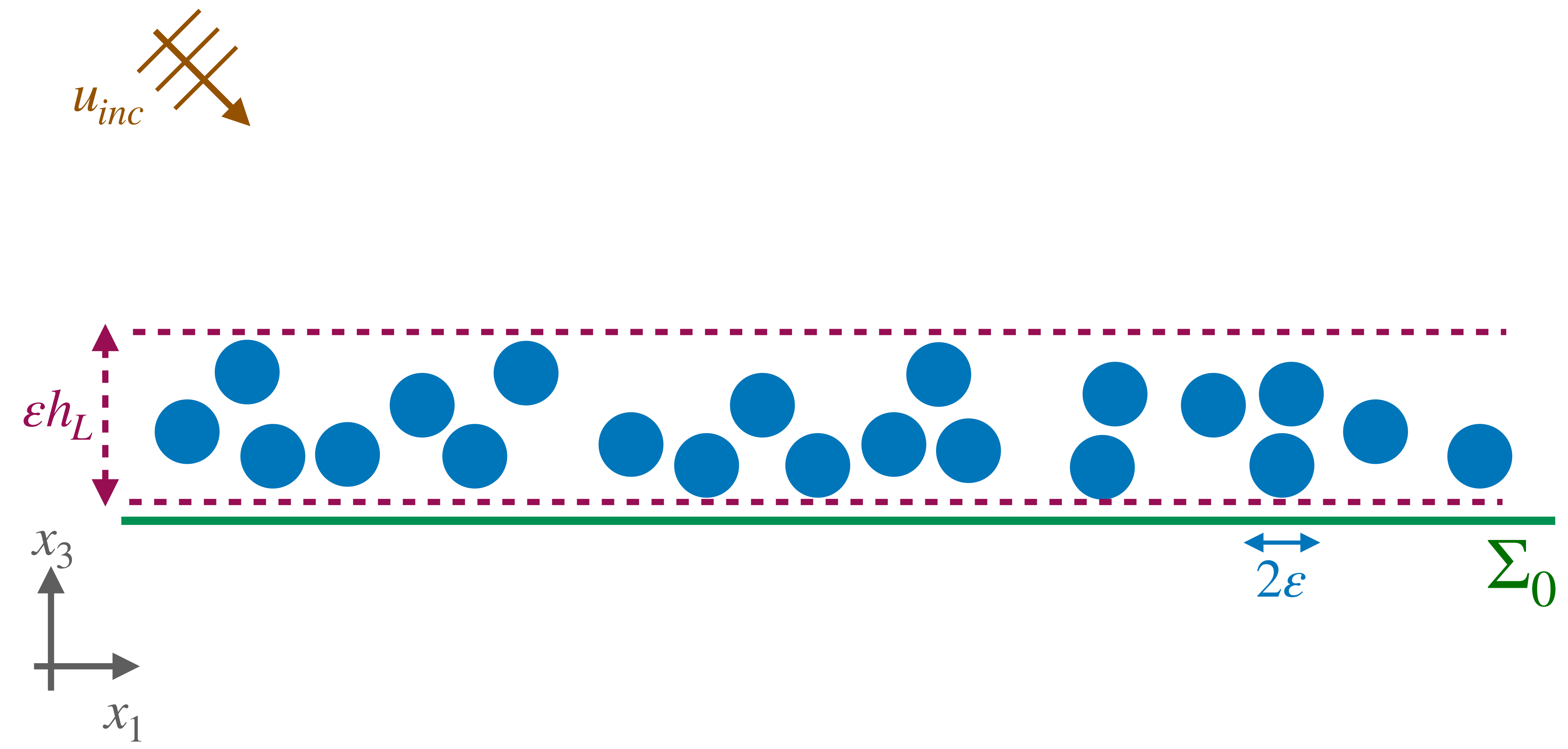


Les résultats obtenus nous semblent complètement originaux pour les problèmes de diffraction par des couches minces aléatoires.

Plan de l'exposé

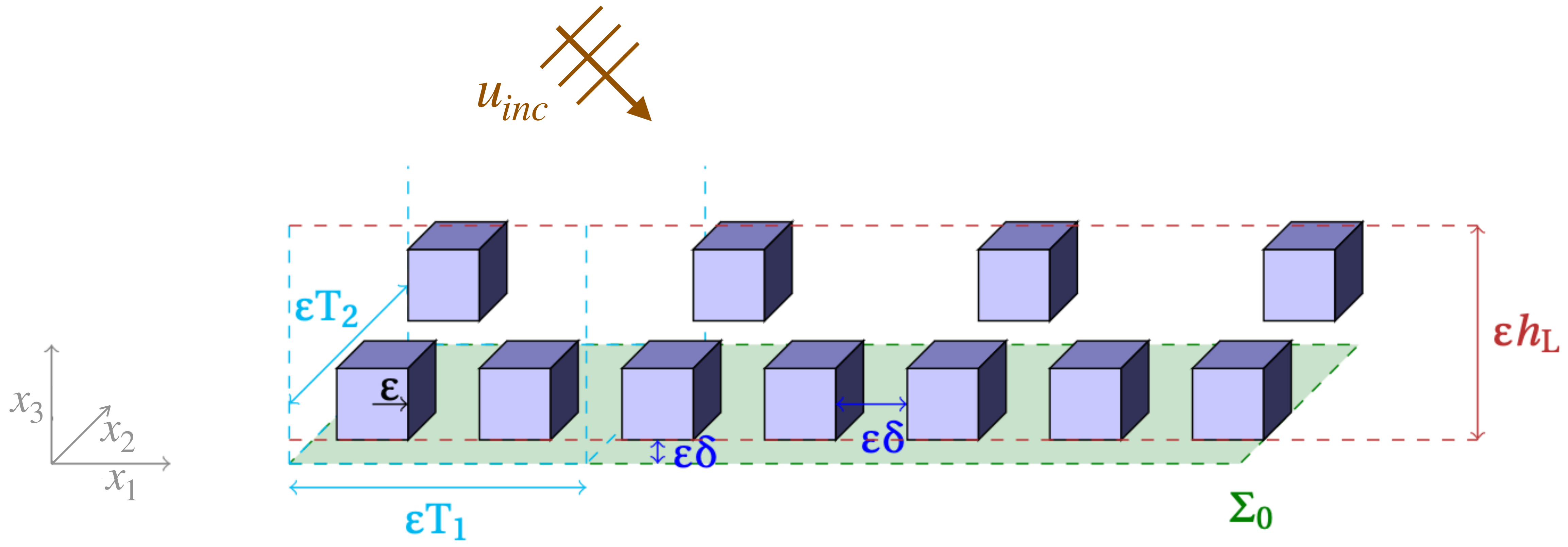
Partie 1 : Etude du cas scalaire

- ✳ Présentation du modèle
- ✳ Mise en place de la méthode pour construire un modèle approché
- ✳ Construction des modèles effectifs
- ✳ Simulations numériques



Partie 2 : Etude du cas Maxwell pour une couche périodique

- ✳ Développement asymptotique
- ✳ Problèmes de champ proche
- ✳ Construction du modèle effectif et validations



Etude du cas scalaire

- *Présentation du modèle*
- *Développement asymptotique à 2 échelles*
- *Problèmes de champ proche dans le cas périodique*
- *Problèmes de champ proche dans le cas stationnaire et ergodique*
- *Modèles effectifs*
- *Simulations numériques*

Hypothèses sur la distribution aléatoire

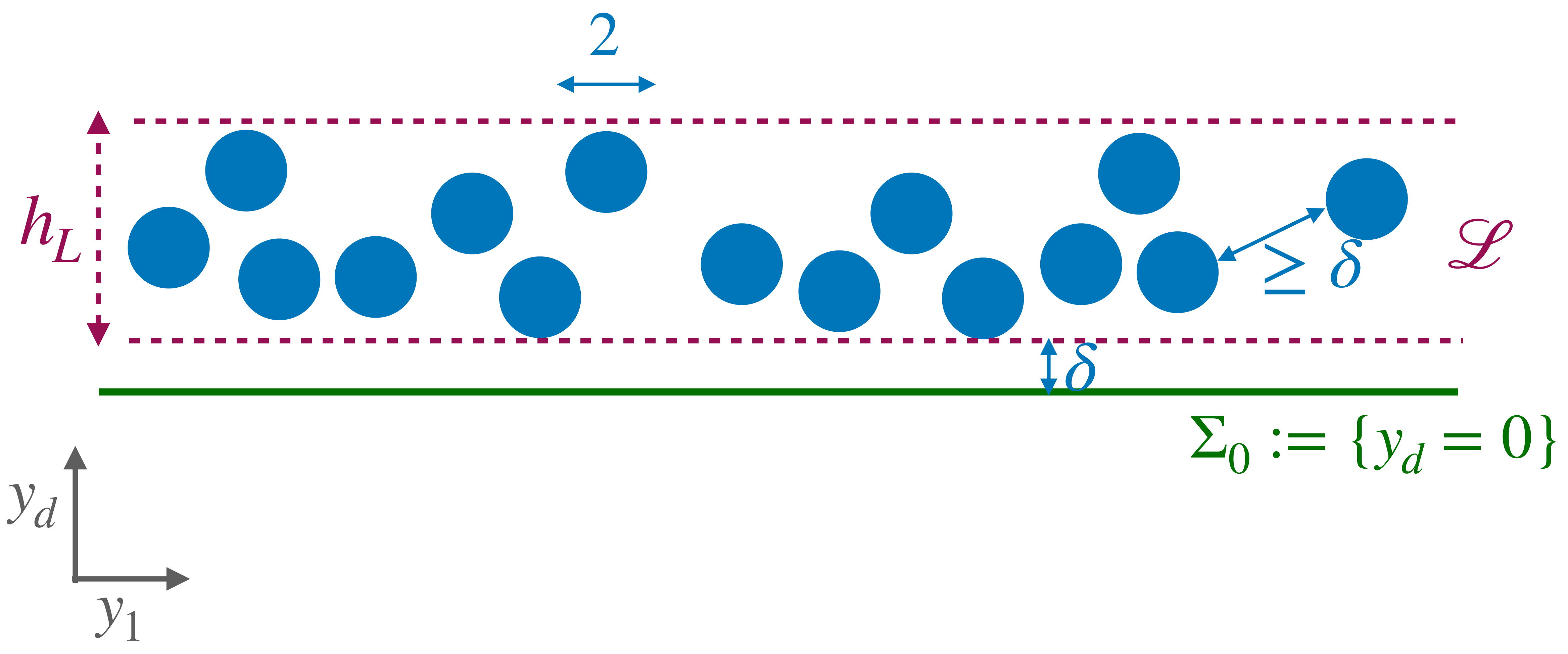
$\boxed{\varepsilon = 1}$

$\mathbf{y} = \left(\mathbf{y}_{\parallel}, y_d\right) \in \mathbb{R}^d$ avec $d = 2$ ou 3

$\mathbf{y}_{\parallel} = y_1$ pour $d = 2$

$\mathbf{y}_{\parallel} = (y_1, y_2)$ pour $d = 3$

$\mathscr{D}_\omega := \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+ \backslash \overline{\mathscr{P}_\omega}$



Soit $\{y_\omega^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ le processus ponctuel correspondant aux centres des particules

- *Soit $\mathscr{P}_\omega$ l'ensemble de particules $B\left(y_m^\omega\right)$ de rayon 1 centrées en y_ω^m au dessus de Σ_0*
- *Les particules se trouvent au moins à une distance $\delta > 0$ les unes des autres et de Σ_0*
- *$\mathscr{P}_\omega \subset \mathscr{L} := \mathbb{R}^{d-1} \times (\delta, h_L + \delta)$, où $h_L > 0$ est la taille de la couche.*
- *La distribution de $\{y_\omega^m\}_m$ est **stationnaire et ergodique***

sa loi de distribution $\mathbb{P}$ est la même en tout point de $\mathscr{L}$

Dans la suite $\mathscr{P}_\omega^\varepsilon = \varepsilon \mathscr{P}_\omega$.

Définition de la stationnarité et l'ergodicité

- *Soit Ω l'ensemble des processus ponctuels $\{\mathbf{y}_\omega^m\}_m$ dans la bande*
- *Soit $\tau : \Omega \times \mathbb{R}^d \to \Omega$ l'opérateur de translation*

$$\forall (\omega, \mathbf{x}) \in \Omega \times \mathbb{R}^d \quad \text{tel que } \mathbf{y}_\omega^m + \mathbf{x} \in \mathscr{L}, \quad \tau(\omega, \mathbf{x}) = \omega' \quad \text{avec} \quad \mathbf{y}_{\omega'}^m = \mathbf{y}_\omega^m + \mathbf{x} \quad \text{pour tout } m \in \mathbb{N}.$$

L'action $\left(\tau_{\mathbf{x}} := \tau(\,\cdot\,, \mathbf{x})\right)_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d}$ préserve la mesure $\mathbb{P}$

*Un processus $f : \mathbb{R}^d \times \Omega \to \mathbb{R}^p$ est dit **stationnaire** par rapport à τ si et seulement si*

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d, \ \text{p.t } \omega \in \Omega, \ f(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \omega) = f(\mathbf{x}, \tau_{\mathbf{y}}\omega)$$

Théorème de Birkhoff

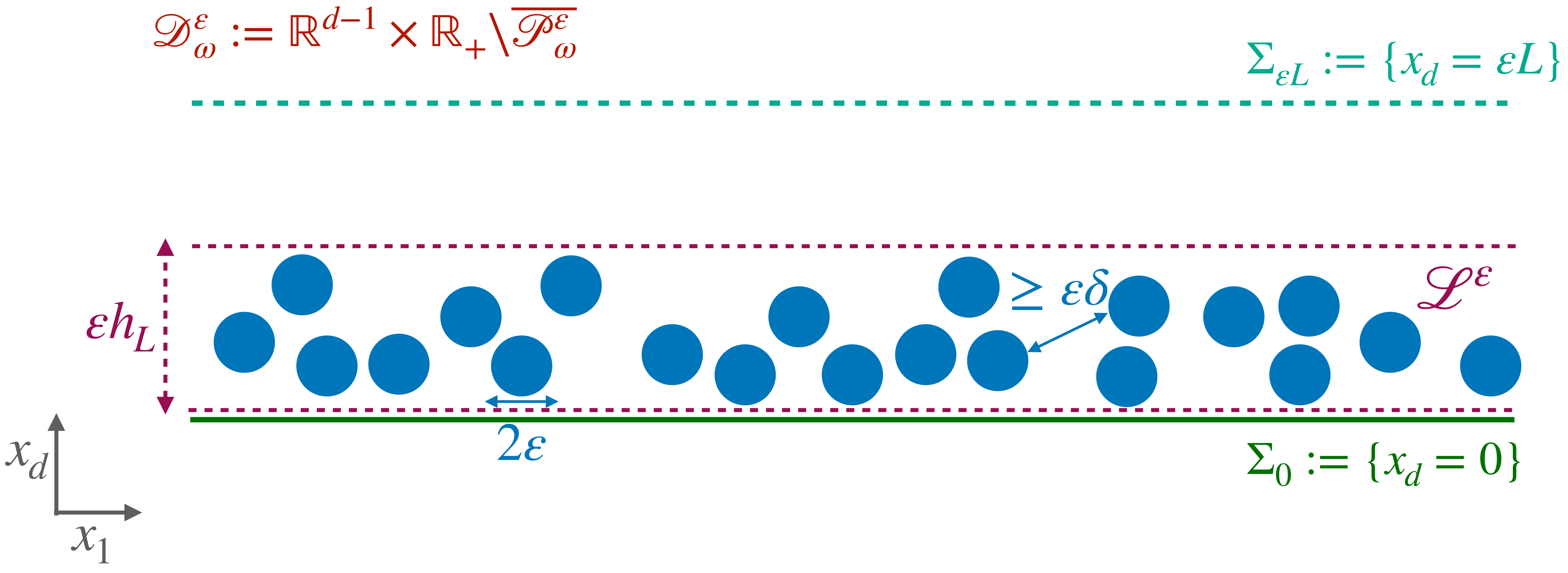
Soit f un processus stationnaire par rapport à l'action ergodique $(\tau_x)_{x\in\mathbb{R}^d}$ de $L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^d, L^1(\Omega)\right)$. Alors presque sûrement et dans $L^1(\Omega)$

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad \frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} f(\mathbf{y}+\mathbf{x}, \omega)\,\mathrm{d}\mathbf{y} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(f)$$

B_R correspond à la boule centrée en 0 et de rayon R dans $\mathbb{R}^d$.

Présentation du modèle simplifié

Dans la suite $\mathscr{P}^\varepsilon_\omega = \varepsilon \mathscr{P}_\omega$.



$-\Delta u^\varepsilon_\omega - k^2 u^\varepsilon_\omega = f$ dans $\mathscr{D}^\varepsilon_\omega$

$-\partial_{x_d} u^\varepsilon_\omega + ik\gamma u^\varepsilon_\omega = 0$ sur Σ_0

Soit $u^\varepsilon_\omega = 0$ sur $\partial \mathscr{P}^\varepsilon_\omega$ (TE);

Soit $\nabla u^\varepsilon_\omega \cdot \vec{n} = 0$ sur $\partial \mathscr{P}^\varepsilon_\omega$ (TM) .

$$u^\varepsilon_\omega(\mathbf{x}) = \int_{\Sigma_{\varepsilon L}} \partial_{x_d} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \; u^\varepsilon_\omega \Big|_{\Sigma_{\varepsilon L}} (\mathbf{y}_\parallel) \, \mathrm{d}\mathbf{y}_\parallel$$

(UPRC)

avec $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ la solution fondamentale de l'équation de Helmholtz

Presque sûrement (p.s.), il existe une unique solution u^ε_ω et il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $C > 0$ tels que $\forall \varepsilon < \varepsilon_0$

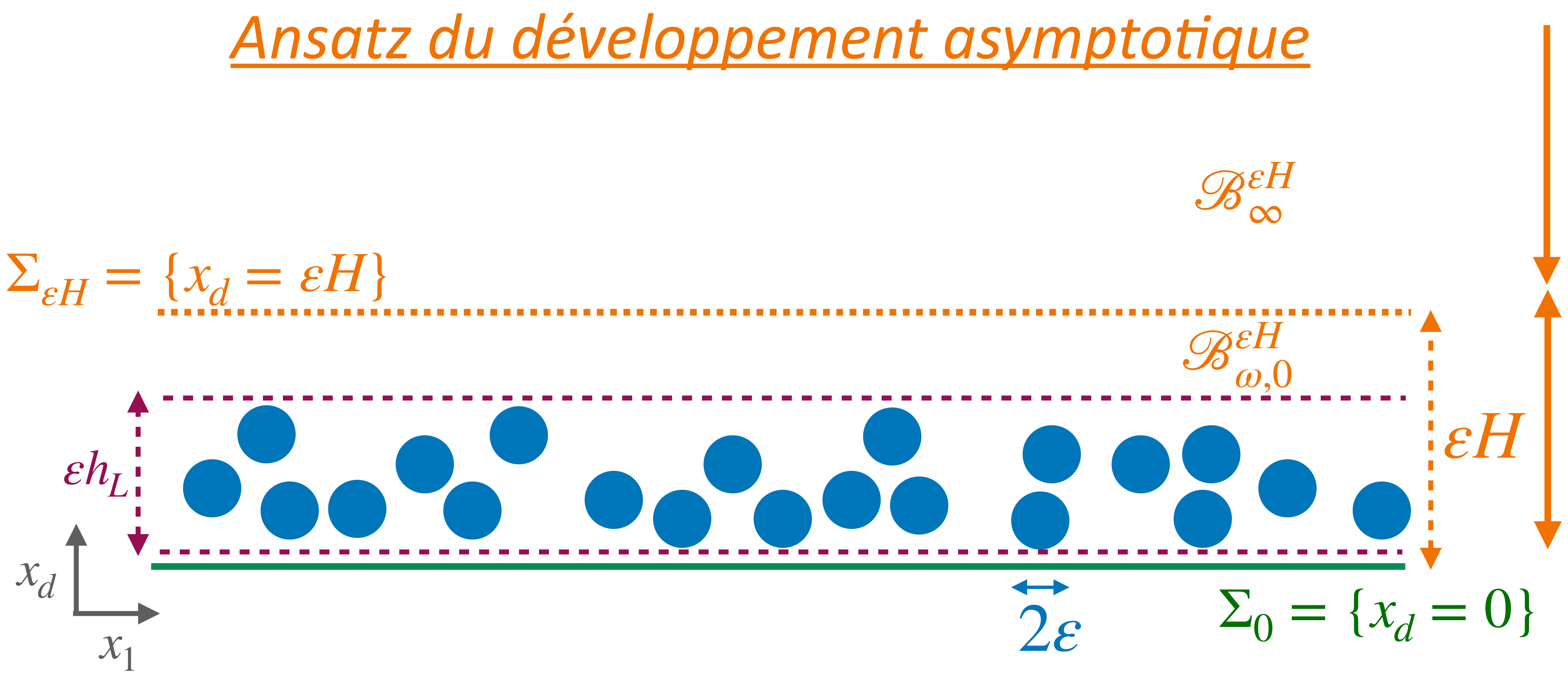
$$\|u^\varepsilon_\omega\|_{H^1} \leq C$$

où ε_0 et C sont indépendantes de ε et de ω

Etude du cas scalaire

- *Présentation du modèle*
- *Développement asymptotique à 2 échelles*
- *Problèmes de champ proche dans le cas périodique*
- *Problèmes de champ proche dans le cas stationnaire et ergodique*
- *Modèles effectifs*
- *Simulations numériques*

Développement asymptotique



Pour $x_d > \varepsilon H$

Termes de champ lointain

$$u_\omega^\varepsilon(\mathbf{x}) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \varepsilon^m u_{\omega,m}^{FF}(\mathbf{x}_\parallel, x_d) + \sum_{m\in\mathbb{N}} \varepsilon^m U_{\omega,m}^{NF}\left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, \frac{x_d}{\varepsilon}\right)$$

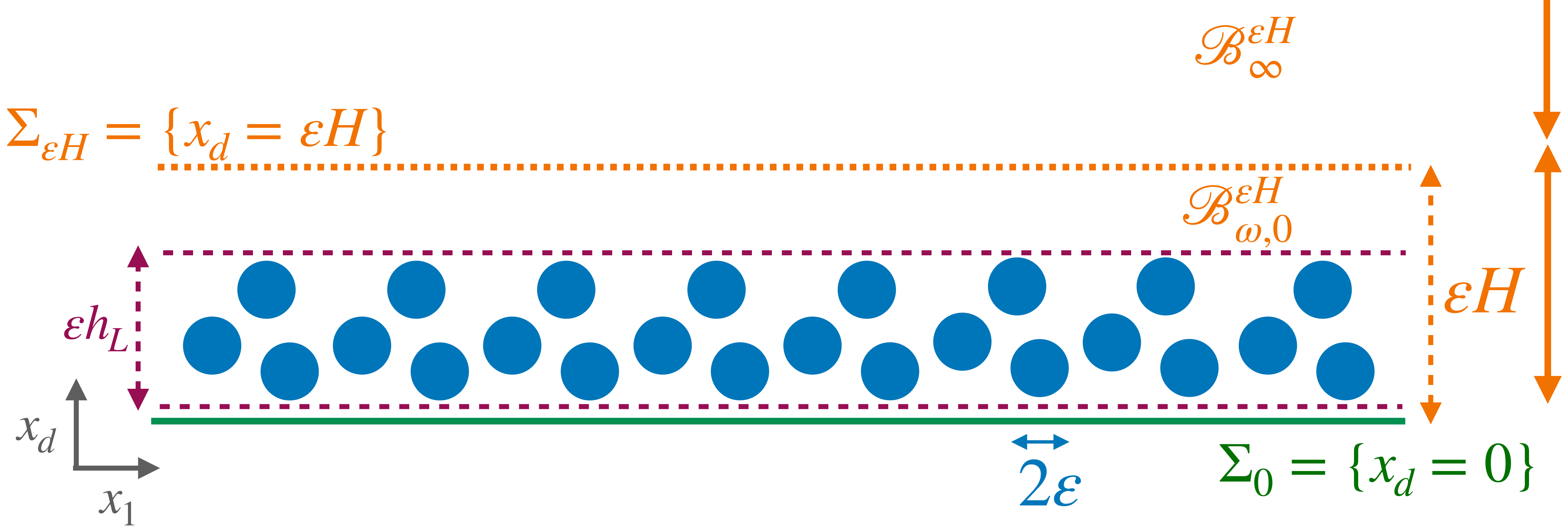
Pour $x_d < \varepsilon H$

$$u_\omega^\varepsilon(\mathbf{x}) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \underbrace{\varepsilon^m U_{\omega,m}^{NF}\left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, \frac{x_d}{\varepsilon}\right)}_{\text{Termes de champ proche}}$$

- *Les $u_{\omega,m}^{FF}$ varient à l'échelle macroscopique $\mathbf{x}$ et ne vivent qu'au dessus des particules.*
- *Les $U_{\omega,m}^{NF}$ dépendent de $\mathbf{x}_\parallel$ mais aussi des variables microscopiques $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_\parallel, y_d) = \left(\frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, \frac{x_d}{\varepsilon}\right)$.*
- *Le développement asymptotique dépend du paramètre H.*

Développement asymptotique

Ansatz du développement asymptotique



Pour $x_d > \varepsilon H$

$$u^\varepsilon_\omega(\mathbf{x}) = \overbrace{\sum_{m\in\mathbb{N}} \varepsilon^m u^{FF}_{\omega,m}(\mathbf{x}_\parallel, x_d)}^{\text{Termes de champ lointain}} + \sum_{m\in\mathbb{N}} \varepsilon^m U^{NF}_{\omega,m}\left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, \frac{x_d}{\varepsilon}\right)$$

Pour $x_d < \varepsilon H$

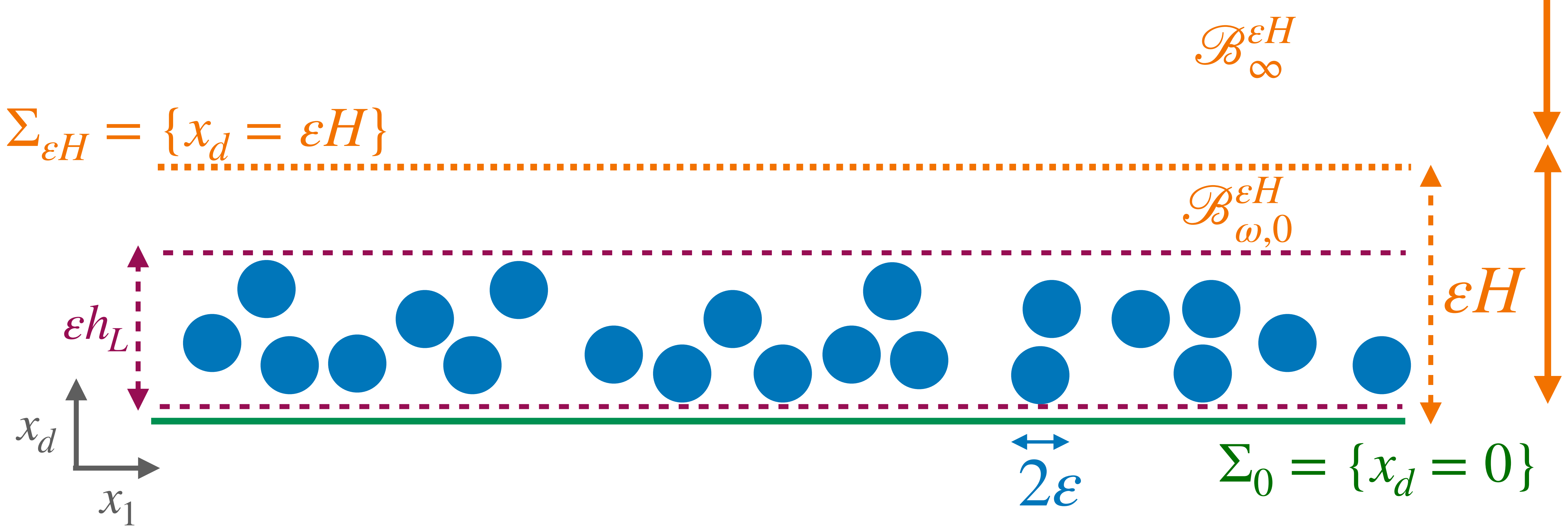
$$u^\varepsilon_\omega(\mathbf{x}) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \underbrace{\varepsilon^m U^{NF}_{\omega,m}\left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, \frac{x_d}{\varepsilon}\right)}_{\text{Termes de champ proche}}$$

- *Les $u^{FF}_{\omega,m}$ varient à l'échelle macroscopique $\mathbf{x}$ et ne vivent qu'au dessus des particules.*
- *Les $U^{NF}_{\omega,m}$ dépendent de $\mathbf{x}_\parallel$ mais aussi des variables microscopiques $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_\parallel, y_d) = \left(\frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, \frac{x_d}{\varepsilon}\right)$.*
- *Le développement asymptotique dépend du paramètre H.*
- *Nous imposons que,*

Dans le cas périodique

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} \ast \ \forall \mathbf{x}_\parallel \in \mathbb{R}^{d-1},\ \forall y_d \in \mathbb{R}^*_+,\ \mathbf{y}_\parallel \mapsto U^{NF}_m(\mathbf{x}_\parallel; \mathbf{y}_\parallel, y_d) \text{ est } P\text{-}\textbf{périodique} \text{ par rapport à } \mathbf{y}_\parallel\,; \\ \ast \ \forall \mathbf{x}_\parallel \in \mathbb{R}^{d-1},\ \forall \mathbf{y}_\parallel \in \mathbb{R}^{d-1},\ U^{NF}_m(\mathbf{x}_\parallel; \mathbf{y}_\parallel, y_d) \underset{y_d\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,. \end{cases}$$

Développement asymptotique



Pour $x_d > \varepsilon H$

$$u_\omega^\varepsilon(\mathbf{x}) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \varepsilon^m \overbrace{u_{\omega,m}^{FF}(\mathbf{x}_\parallel, x_d)}^{\text{Termes de champ lointain}} + \sum_{m\in\mathbb{N}} \varepsilon^m U_{\omega,m}^{NF}\left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, \frac{x_d}{\varepsilon}\right)$$

Pour $x_d < \varepsilon H$

$$u_\omega^\varepsilon(\mathbf{x}) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \underbrace{\varepsilon^m U_{\omega,m}^{NF}\left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, \frac{x_d}{\varepsilon}\right)}_{\text{Termes de champ proche}}$$

- *Les* $u_{\omega,m}^{FF}$ *varient à l'échelle macroscopique* $\mathbf{x}$ *et ne vivent qu'au dessus des particules.*
- *Les* $U_{\omega,m}^{NF}$ *dépendent de* $\mathbf{x}_\parallel$ *mais aussi des variables microscopiques* $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_\parallel, y_d) = \left(\frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, \frac{x_d}{\varepsilon}\right)$.
- *Le développement asymptotique dépend du paramètre* H.
- *Nous imposons que,*

Dans le cas aléatoire

$\forall m \in \mathbb{N}$

$\ast$ $\forall \mathbf{x}_\parallel \in \mathbb{R}^{d-1}, \forall y_d \in \mathbb{R}_+^*, \; (\omega, \mathbf{y}_\parallel) \mapsto U_{\omega,m}^{NF}(\mathbf{x}_\parallel; \mathbf{y}_\parallel, y_d)$ *est* ***stationnaire*** *;*

$\ast$ p.s. $\forall \mathbf{x}_\parallel \in \mathbb{R}^{d-1}, \forall \mathbf{y}_\parallel \in \mathbb{R}^{d-1}, \; U_{\omega,m}^{NF}(\mathbf{x}_\parallel; \mathbf{y}_\parallel, y_d) \underset{y_d\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démarche formelle: *Supposer qu'un tel développement existe et insérer le développement dans les équations vérifiées par* u_ω^ε .

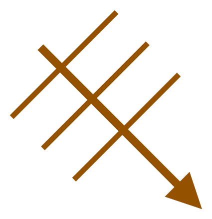
Cascade d'équations

Termes de champ lointain

$u^{FF}_{\omega,m}$ est sortant

$\forall m \in \mathbb{N}$

f



$$-\Delta u^{FF}_{\omega,m} - k^2 u^{FF}_{\omega,m} = f\delta_0 \text{ dans } \mathbb{R}^{d-1} \times (\varepsilon H, +\infty)$$

$\delta_0 = 1$ si $m = 0$
$\delta_0 = 0$ si $m > 0$

$\Sigma_{\varepsilon H} = \{x_d = \varepsilon H\}$

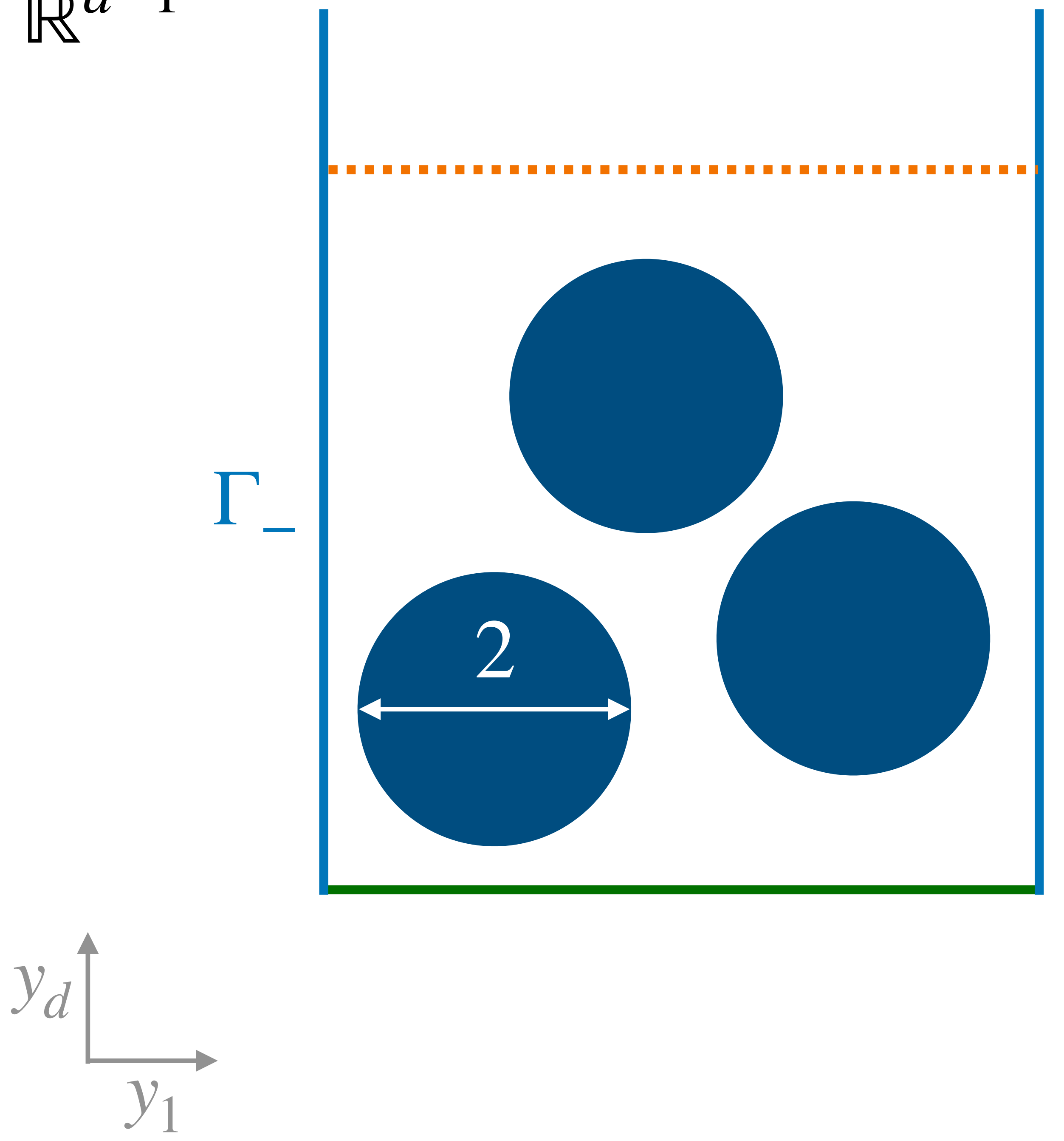
Il manque une condition sur $\Sigma_{\varepsilon H}$

Termes de champ proche dans le cas périodique

U^{NF}_m *est solution* $P-$***périodique par rapport à*** $y_\parallel$ *d'un* ***problème de type Laplace*** *dans une* ***demi-bande périodique ,*** *paramétré par* $\mathbf{x}_\parallel$

$\forall m \in \mathbb{N}, \ \forall \mathbf{x}_\parallel \in \mathbb{R}^{d-1}$

$\mathscr{B} = (0,P) \times \mathbb{R}_+ \backslash \left(\overline{\mathscr{P}_\#} \cup \Sigma^\#_H\right)$



$\Sigma^\#_H = \{y_d = H\}$

$\Sigma^\#_0 = \{y_d = 0\}$

$$-\Delta_{\mathbf{y}} U^{NF}_m = 2\nabla_{\mathbf{x}_\parallel} \cdot \nabla_{\mathbf{y}_\parallel} U^{NF}_{m-1} + \left(\Delta_{\mathbf{x}_\parallel} + k^2\right) U^{NF}_{m-2} \text{ dans } \mathscr{B}$$

$$\left[U^{NF}_m\right]_H = -\, u^{FF}_m\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}$$

$$\left[-\,\partial_{y_d} U^{NF}_m\right]_H = \partial_{x_d} u^{FF}_{m-1}\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}$$

$$U^{NF}_m = 0 \text{ sur } \partial\mathscr{P}_\# \text{ (TE)}$$

ou

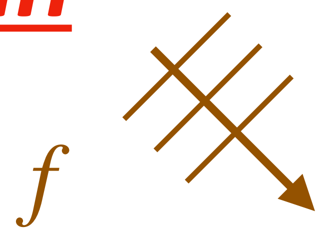
$$\nabla U^{NF}_m \cdot \vec{n} = -\,\nabla_{\mathbf{x}_\parallel} U^{NF}_{m-1} \cdot \vec{n}_\parallel \text{ sur } \partial\mathscr{P}_\# \text{ (TM)}$$

$$-\partial_{y_d} U^{NF}_m = -\,ik\gamma U^{NF}_{m-1} \text{ sur } \Sigma^\#_0$$

Cascade d'équations

Termes de champ lointain

$\forall m \in \mathbb{N}$



$u^{FF}_{\omega,m}$ est sortant

$$-\Delta u^{FF}_{\omega,m} - k^2 u^{FF}_{\omega,m} = f\delta_0 \ \text{ dans } \ \mathbb{R}^{d-1} \times (\varepsilon H, +\infty)$$

$\delta_0 = 1$ si $m = 0$
$\delta_0 = 0$ si $m > 0$

$\Sigma_{\varepsilon H} = \{x_d = \varepsilon H\}$

Il manque une condition sur $\Sigma_{\varepsilon H}$

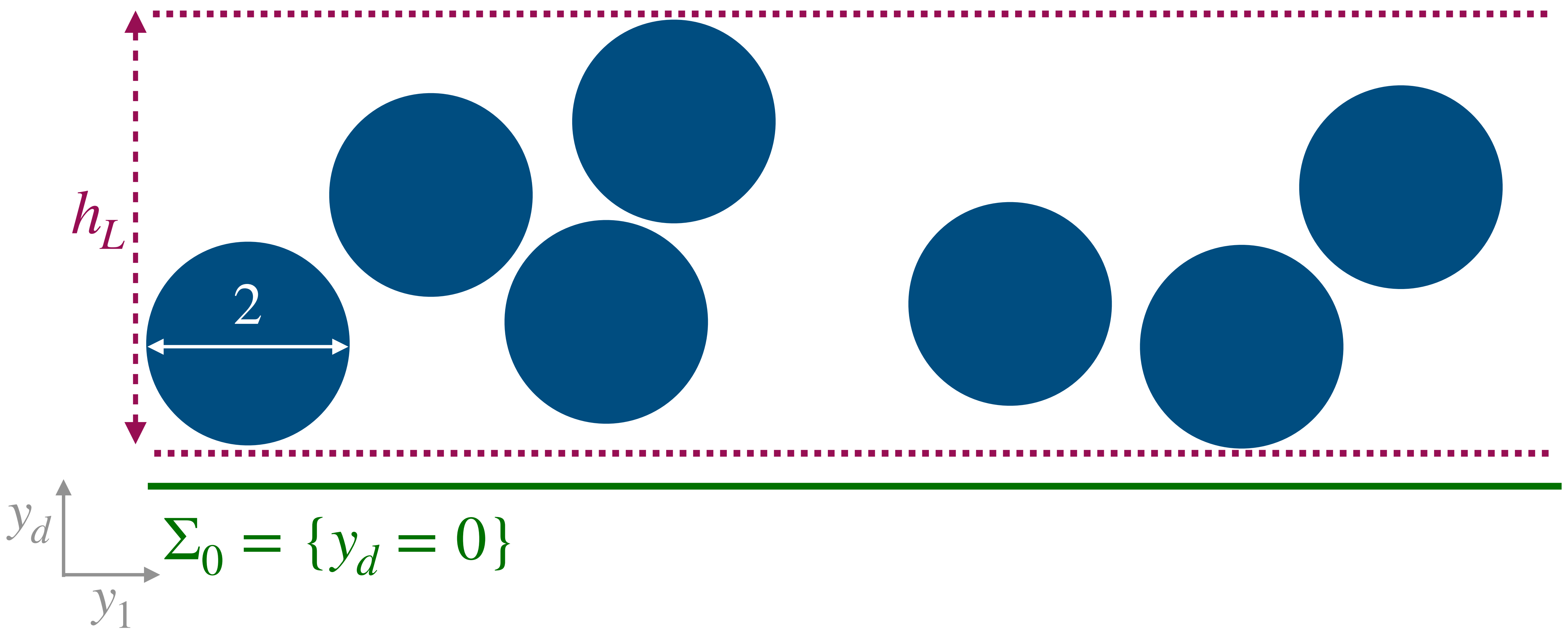
Termes de champ proche en aléatoire

$U^{NF}_{\omega,m}$ *est solution d'un* ***problème de type Laplace*** *dans une* ***demi-espace infini*** *contenant des particules de taille 1.*

$\forall m \in \mathbb{N}, \ \forall \mathbf{x}_\parallel \in \mathbb{R}^{d-1}$

$\mathcal{D}_\omega := \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+ \backslash \left(\overline{\mathcal{P}_\omega} \cup \Sigma_H\right)$

$\Sigma_H = \{y_d = H\}$



$$-\Delta_{\mathbf{y}} U^{NF}_{\omega,m} = 2\nabla_{\mathbf{x}_\parallel} \cdot \nabla_{\mathbf{y}_\parallel} U^{NF}_{\omega,m-1} + \left(\Delta_{\mathbf{x}_\parallel} + k^2\right) U^{NF}_{\omega,m-2} \ \text{ dans } \mathcal{D}_\omega$$

$$\left[U^{NF}_{\omega,m}\right]_H = -\, u^{FF}_{\omega,m}\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}$$

$$\left[-\,\partial_{y_d} U^{NF}_{\omega,m}\right]_H = \partial_{x_d} u^{FF}_{\omega,m-1}\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}$$

$U^{NF}_{\omega,m} = 0$ sur $\partial\mathcal{P}_\omega$ (TE)

ou

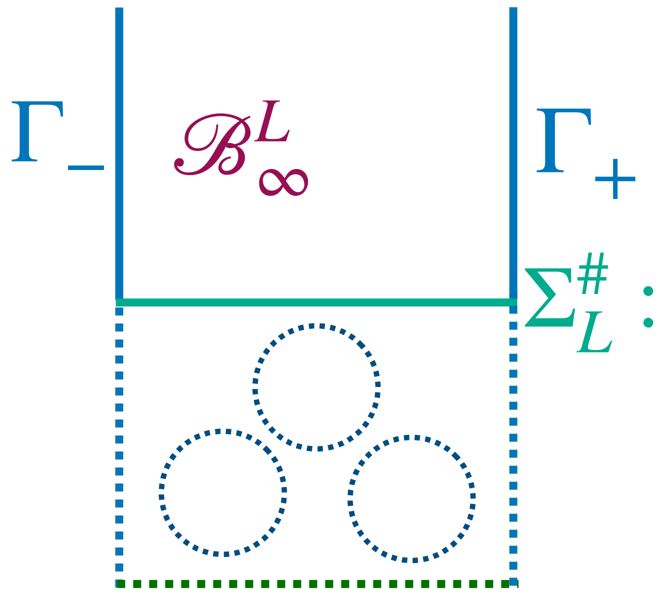
$\nabla U^{NF}_{\omega,m} \cdot \vec{n} = -\nabla_{\mathbf{x}_\parallel} U^{NF}_{\omega,m-1} \cdot \vec{n}_\parallel$ sur $\partial\mathcal{P}_\omega$ (TM)

$-\partial_{y_d} U^{NF}_{\omega,m} = -\,ik\gamma U^{NF}_{\omega,m-1}$ sur Σ_0

Etude du cas scalaire

- *Présentation du modèle*
- *Développement asymptotique à 2 échelles*
- *Problèmes de champ proche dans le cas périodique*
- *Problèmes de champ proche dans le cas stationnaire et ergodique*
- *Modèles effectifs*
- *Simulations numériques*

Comportement à l'infini



$\Sigma_L^\# := \{y_2 = L\},\ L \geq H$

Dans le cas périodique

$$-\Delta U = F \quad \text{dans } \mathscr{B}_\infty^L := (0,P) \times (H, +\infty)$$
$$U \ \text{ est } P-\text{périodique}$$

1- Si $F = 0$

U admet la décomposition modale pour $y_2 > L$

$$U(y_1, y_2) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(U, \varphi_m\right)_{L^2(\Sigma_L^\#)} e^{\frac{-2|m|\pi}{P}(y_2-L)}\ \varphi_m(y_1) \quad \text{avec } \varphi_m(y_1) = \frac{1}{\sqrt{P}} e^{\frac{2il\pi}{P}y_1}$$

On introduit une condition transparente afin de restreindre les problèmes vérifiés par les champs proches à un domaine borné.

Opérateur DtN :

$$\Lambda U \ = \ \partial_{y_2} U \ = \ \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(\frac{2|m|\pi}{P}\right)\left(U, \varphi_m\right)_{L^2(\Sigma_L^\#)} \varphi_m(y_1) \quad \text{sur } \Sigma_L^\#$$

2- Si $F \neq 0$ *(sous certaines hypothèses sur F)*

$$U = U_{hom} + U_{part}$$

- U_{hom} *vérifie* $\Delta U_{hom} = 0$
- U_{part} *est la seule solution particulière vérifiant* $-\Delta U_{part} = F$

Opérateur DtN :

$$\partial_{y_2} U + \Lambda U = \partial_{y_2} U_{part} \ \text{ sur } \Sigma_L^\# \qquad \text{où } U_{part} \text{ ne dépend que de } F\Big|_{y_2>L} \text{ et } \int_{\Sigma_L^\#} \partial_{y_2} U_{part}\, \mathrm{d}y_1 = 0$$

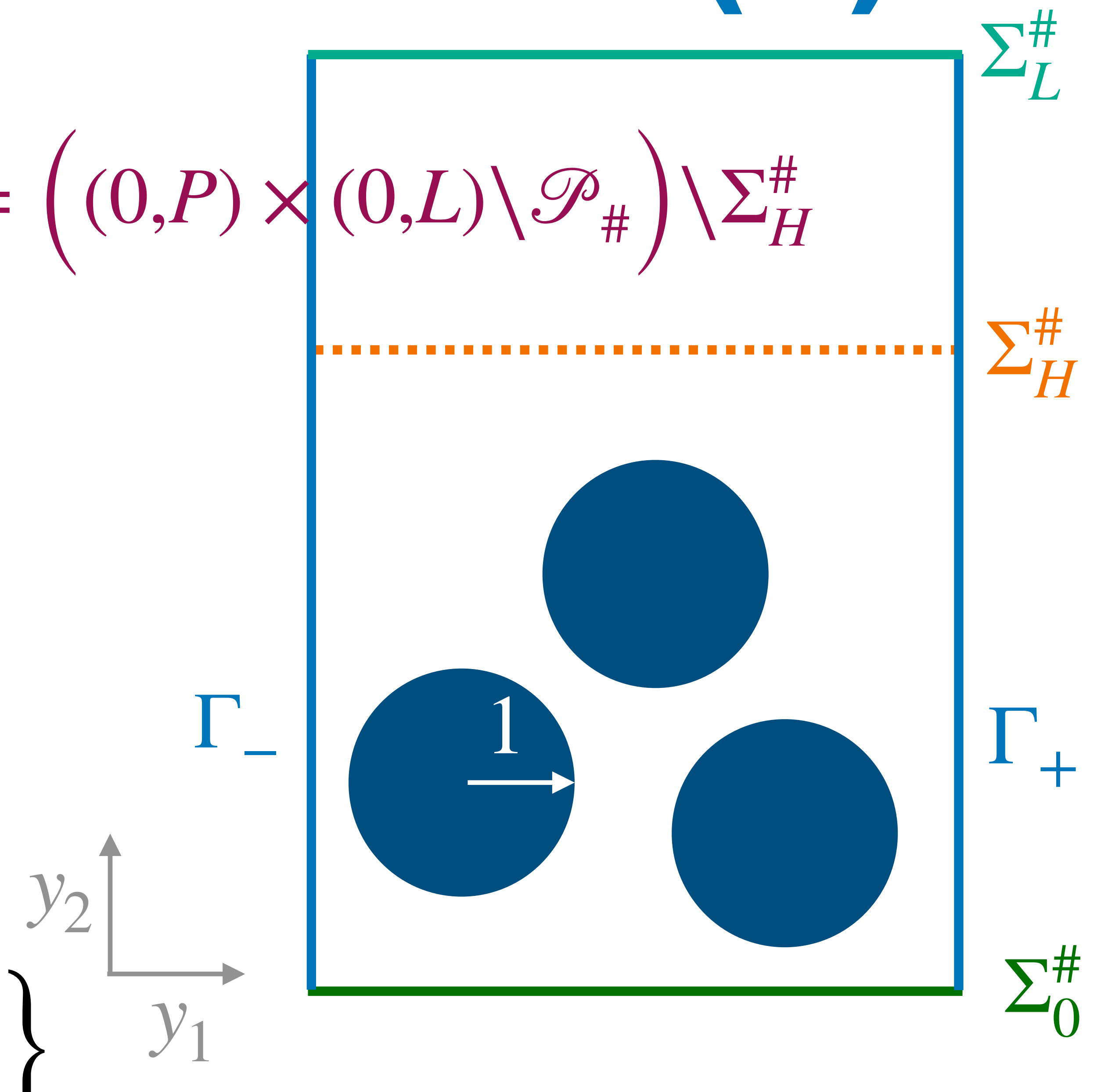
Dans les 2 cas :

U converge exponentiellement vite vers une constante $C_U = \dfrac{1}{P}\displaystyle\int_{\Sigma_L^\#} U(y_1, L)\, \mathrm{d}y_1.$

Condition de Dirichlet sur les particules (1)

Dans le cas périodique

$$\mathscr{B}_0^L := \Big((0,P)\times(0,L)\setminus\mathscr{P}_\#\Big)\setminus\Sigma_H^\#$$



$$\begin{aligned}
-\Delta U = F &\quad \text{dans } \mathscr{B}_0^L\\
-\partial_{y_d} U = G &\quad \text{sur } \Sigma_0^\#\\
U = 0 &\quad \text{sur } \partial\mathscr{P}_\#\\
\Big[U\Big]_H = \alpha^D \quad \text{et} &\quad \Big[-\partial_{y_d}U\Big]_H = \alpha^N\\
\partial_{y_2} U + \Lambda U = \partial_{y_2} U_{part} &\quad \text{sur } \Sigma_L^\#
\end{aligned}$$

- *Ce problème admet une unique solution dans* $H^1_\#\big(\mathscr{B}_0^L\big) := \Big\{u \in H^1\big(\mathscr{B}_0^L\big),\ u\big|_{\Gamma_+} = u\big|_{\Gamma_-}\Big\}$

- *A l'infini cette solution tend vers une constante qui peut être calculée à l'aide de la fonction profil*

$$\left|\begin{aligned}
-\Delta\mathscr{N} &= 0 \quad \text{dans } \mathscr{B}_0^L\\
\mathscr{N} &\ \text{est } T-\text{périodique}\\
-\partial_{y_d}\mathscr{N} &= 0 \quad \text{sur } \Sigma_0\\
\mathscr{N} &= 0 \quad \text{sur } \partial\mathscr{P}_\#\\
\partial_{y_2}\mathscr{N} + \Lambda\mathscr{N} &= 1 \quad \text{sur } \Sigma_L^\#
\end{aligned}\right.$$

$$\boxed{C_N = \frac{1}{P}\left(\int_{\mathscr{B}_0^L} F\,\mathscr{N}\,\mathrm{d}\mathbf{y} + \int_{\Sigma_0^\#} G\,\mathscr{N}\,\mathrm{d}y_1\right) + \alpha^N c_0^{(1)} + \alpha^D}$$

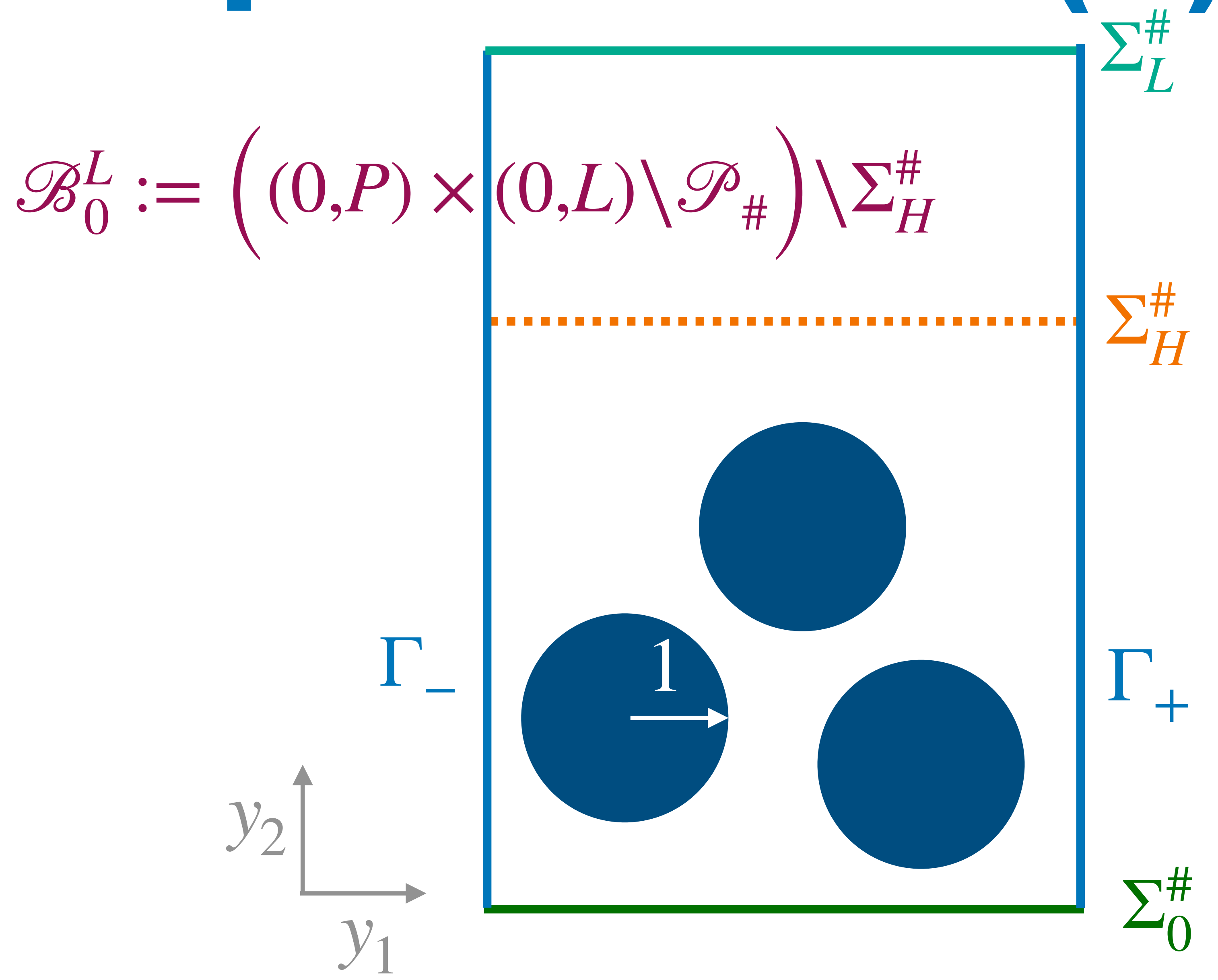
avec $c_0^{(1)} := \dfrac{1}{P}\displaystyle\int_{\Sigma_H^\#}\mathscr{N}\,\mathrm{d}y_1$

- *En imposant que U tend vers 0 à l'infini, on obtient une **condition de compatibilité qui lie les termes sources** entre eux.*

- *On peut alors obtenir une condition pour les champs lointains pour tout $m \geq 0$*

Condition de Dirichlet sur les particules (2)

Dans le cas périodique



La condition de compatibilité est

$$\boxed{\frac{1}{P}\left(\int_{\mathscr{B}_0^L} F\,\mathscr{N}\,\mathrm{d}\mathbf{y} + \int_{\Sigma_0^\#} G\,\mathscr{N}\,\mathrm{d}y_1\right) + \alpha^N\,c_0^{(1)} + \alpha^D = 0}$$

- *Pour* $m=0$ *: on a* $F=0$, $G=0$, $\alpha^N=0$ *et* $\alpha^D = -\,u_0^{FF}\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}$ *ce qui donne*

$$\boxed{u_0^{FF} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_{\varepsilon H}}$$

- *Pour* $m=1$ *: on a* $F=0$, $G=0$, $\alpha^N = \partial_{x_2}u_0^{FF}\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}$ *et* $\alpha^D = u_1^{FF}\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}$*, on obtient alors*

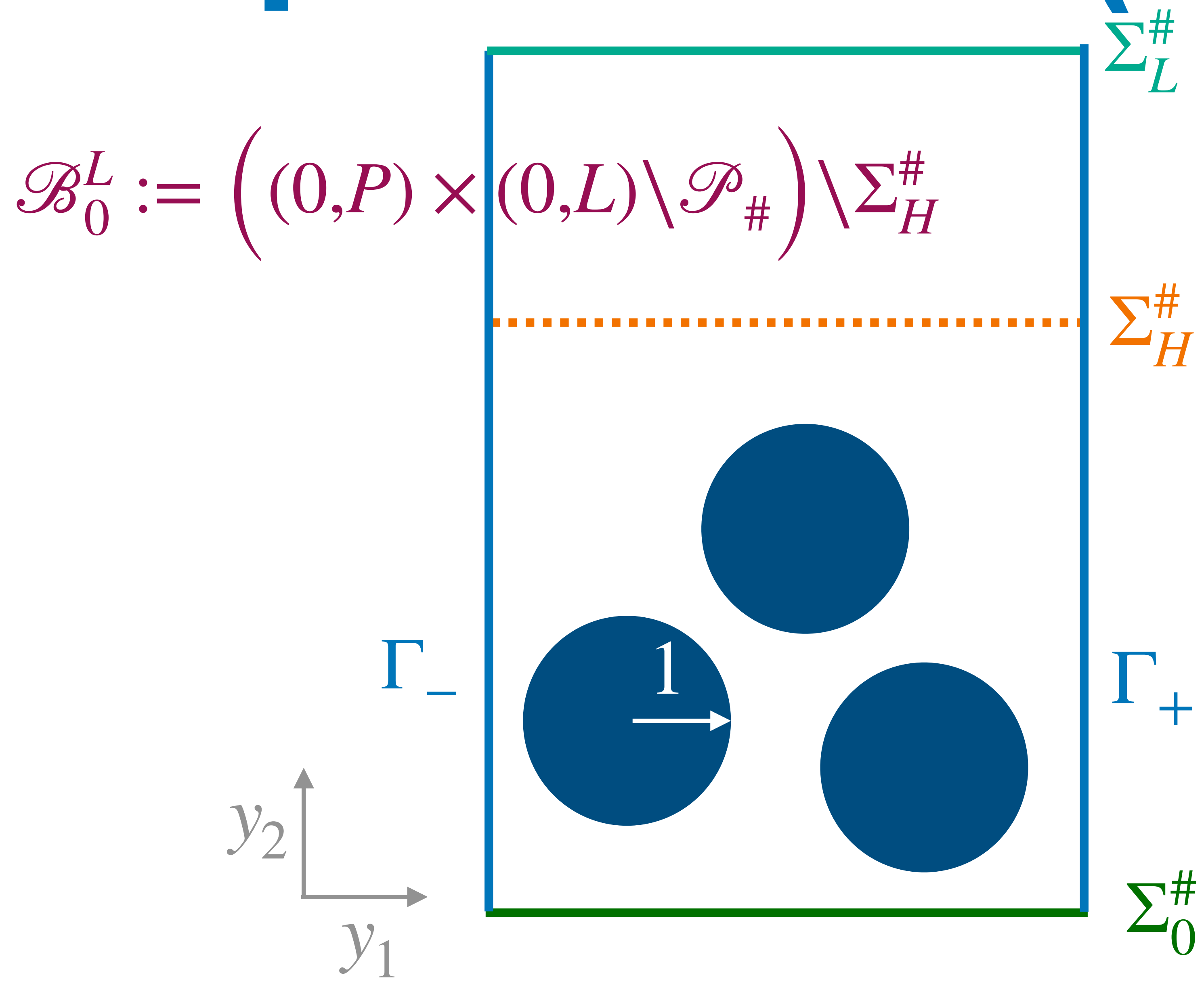
$$\boxed{u_1^{FF} = c_0^{(1)}\partial_{x_2}u_0^{FF} \quad \text{sur } \Sigma_{\varepsilon H}}$$

où on rappelle que $c_0^{(1)} := \dfrac{1}{P}\displaystyle\int_{\Sigma_H^\#}\mathscr{N}\,\mathrm{d}y_1$

Condition de Neumann sur les particules (1)

Dans le cas périodique

$$
\begin{aligned}
-\Delta U &= F && \text{dans } \mathscr{B}_0^L \\
-\partial_{y_d} U &= G^1 && \text{sur } \Sigma_0^\# \\
\nabla U \cdot \vec{n} &= G^2 && \text{sur } \partial \mathscr{P}_\# \\
\big[U\big]_H = \alpha^D \quad &\text{et} \quad \big[-\partial_{y_d} U\big]_H = \alpha^N && \\
\partial_{y_2} U + \Lambda U &= \partial_{y_2} U_{part} && \text{sur } \Sigma_L^\#
\end{aligned}
$$



- *Ce problème n'est pas toujours bien posé dans* $H^1_\#\left(\mathscr{B}_0^L\right)$.

- *On peut montrer que c'est un problème de type Fredholm*

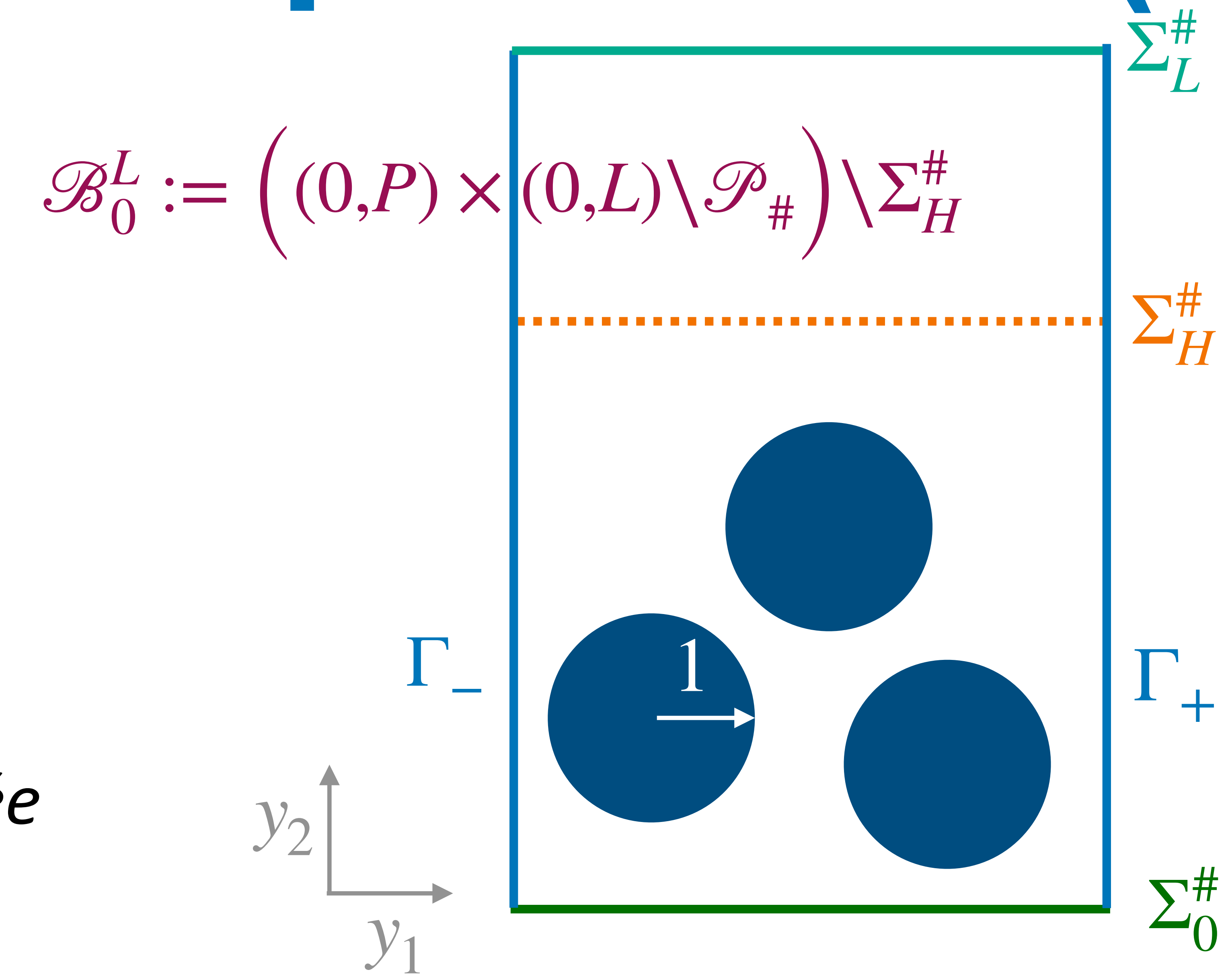
Il existe une solution unique définie à une constante près ssi la condition de compatibilité suivante est satisfaite

$$\int_{\mathscr{B}_0^L} F \,\mathrm{d}\mathbf{y} + \int_{\Sigma_0^\#} G^1 \,\mathrm{d}y_1 + \int_{\partial \mathscr{P}_\#} G^2 \,\mathrm{d}\mathbf{y} + \alpha^N \, P = 0 \qquad (CC)$$

- *En imposant* $\displaystyle\int_{\Sigma_L^\#} U \,\mathrm{d}y_1 = 0$ *alors il existe une unique solution* U *qui vérifie* $\displaystyle\lim_{y_d \to +\infty} U = 0$.

Condition de Neumann sur les particules (2)

Dans le cas périodique



$$\boxed{\int_{\mathscr{B}_0^L} F\,\mathrm{d}\mathbf{y} + \int_{\Sigma_0^\#} G^1\,\mathrm{d}y_1 + \int_{\partial\mathscr{P}_\#} G^2\,\mathrm{d}\mathbf{y} + \alpha^N\ P = 0 \qquad (CC)}$$

- *Pour $m = 0$: on a $F = 0$, $G^1 = 0$, $G^2 = 0$ et $\alpha^N = 0$ donc (CC) est vérifiée*

- *Pour $m = 1$: on a $F = 0$, $G^1 = -\,ik\gamma u_0^{FF}\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}$, $G^2 = -\,\partial_{x_1} u_0^{FF}\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}$ et $\alpha^N = \partial_{x_2} u_0^{FF}\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}$, on obtient donc la condition*

$$\boxed{-\partial_{x_2} u_0^{FF} + ik\gamma u_0^{FF} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_{\varepsilon H}}$$

- *Pour $m = 2$: Il existe une solution U_2^{NF} qui tend vers 0 à l'infini si et seulement si u_1^{FF} vérifie la condition*

$$\boxed{-\partial_{x_2} u_1^{FF} + ik\gamma u_1^{FF} = k^2 a_0^{(2)} u_0^{FF} + k a_1^{(2)} \partial_{x_1} u_0^{FF} + a_2^{(2)} \partial_{x_1}^2 u_0^{FF} \quad \text{sur } \Sigma_{\varepsilon H}}$$

*où les coefficients $a_0^{(2)}$, $a_1^{(2)}$ et $a_2^{(2)}$ sont calculés à l'aide de **fonctions profils**, solutions de problèmes de cellule.*

Etude du cas scalaire

- *Présentation du modèle*
- *Développement asymptotique à 2 échelles*
- *Problèmes de champ proche dans le cas périodique*
- *Problèmes de champ proche dans le cas stationnaire et ergodique*
- *Modèles effectifs*
- *Simulations numériques*

Comportement à l'infini

$\mathscr{B}_\infty^L := \mathbb{R}^{d-1} \times (L, +\infty)$

Dans le cas stationnaire ergodique

$$\left| \begin{aligned} -\Delta U_\omega &= F_\omega \ \text{ dans } \mathscr{B}_\infty^L \\ U_\omega &\ \text{ est stationnaire} \\ U_\omega &= \varphi_\omega \quad \textit{sur } \Sigma_L, \ \ \varphi_\omega \textit{ est donnée} \end{aligned} \right.$$

$\Sigma_L := \{y_2 = L\}, \ L \geq H$

1- Si $F_\omega = 0$

Si $\varphi_\omega \in \mathscr{L}^2\left(\Omega, H^{1/2}_{loc}(\Sigma_L)\right)$ est $\mathbf{y}_\parallel-$stationnaire alors il existe un unique U_ω stationnaire, à gradient $\mathscr{L}^2\left(\Omega, L^2(\mathscr{B}_\infty^L)\right)$, qui s'écrit

$$\text{p.s. } \forall \mathbf{y}_\parallel \in \mathbb{R}^{d-1}, \ \forall y_d > L, \ U_\omega\left(\mathbf{y}_\parallel, y_d\right) = -2 \int_L^{+\infty} \partial_{y_d} G\left(\mathbf{y}_\parallel - \mathbf{z}, y_d - L\right) \ \varphi_\omega(\mathbf{z}) \, \mathrm{d}\mathbf{z}$$

où G est la fonction Green pour de Laplacien.

Etapes de la preuve : Régularisation + passage à la limite

On peut alors introduire un opérateur de Dirichlet-to-Neumann de demi-espace

Opérateur DtN :

$$\partial_{y_d} U_\omega + \Lambda U_\omega = 0 \ \text{ sur } \Sigma_L$$

2- Si $F_\omega \neq 0$: *On peut étendre le résultat précédent dans le cas où F_ω est stationnaire et « assez décroissant à l'infini »*

Dans les 2 cas :

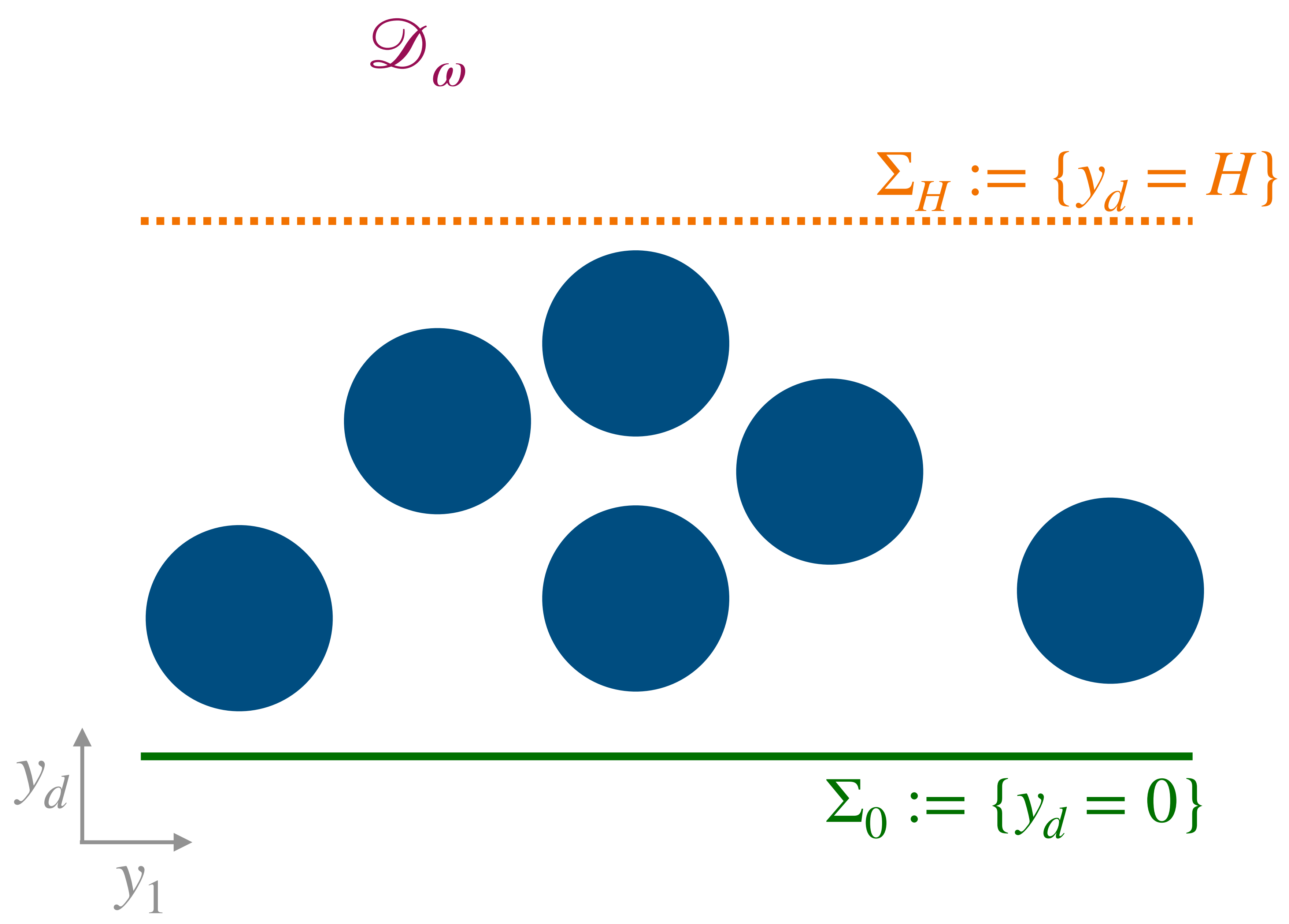
Soit $\varphi_\omega \in \mathscr{L}^2\left(\Omega, H^{1/2}_{loc}(\Sigma_L)\right)$. L'unique solution U vérifie p.s. $\forall \mathbf{y}_\parallel \in \mathbb{R}^{d-1}$,

$$\lim_{y_d \to +\infty} U_\omega\left(\mathbf{y}_\parallel, y_d\right) = \mathbb{E}\left[\varphi_\omega\right]$$

Condition de Dirichlet sur les particules (1)

Dans le cas stationnaire ergodique *Pour $m = 0$ et 1, on a $F_\omega = 0$.*

$$
\begin{aligned}
-\Delta U_\omega^{NF} &= F_\omega \quad \text{dans } \mathscr{D}_\omega \backslash \Sigma_H \\
-\partial_{y_d} U_\omega^{NF} &= G_\omega \quad \text{sur } \Sigma_0 \\
U_\omega^{NF} &= 0 \quad \text{sur } \partial \mathscr{P}_\omega \\
\Big[U_\omega^{NF} \Big]_H &= \alpha_\omega^D \quad \text{et} \quad \Big[-\partial_{y_d} U_\omega^{NF} \Big]_H = \alpha_\omega^N
\end{aligned}
$$

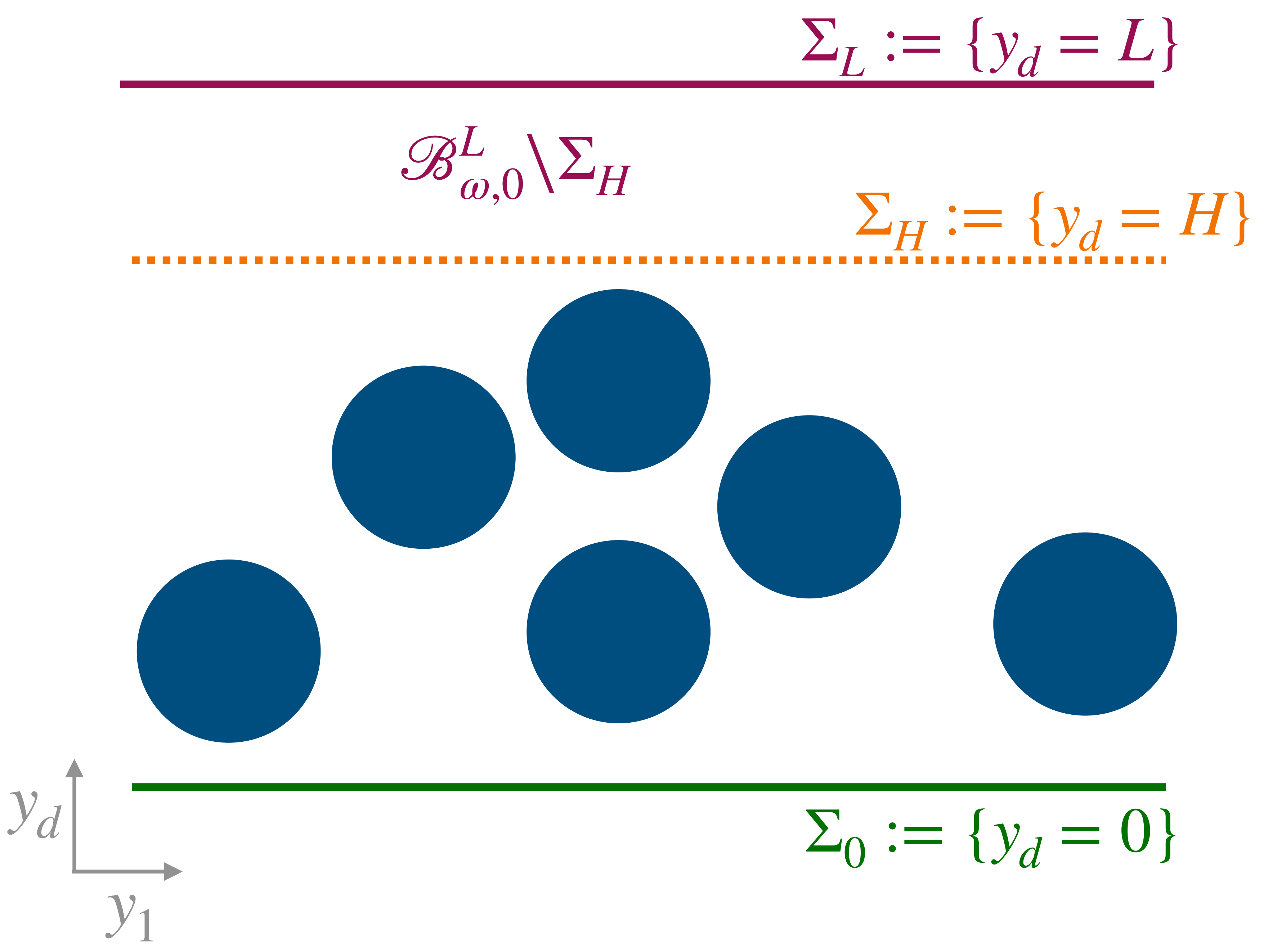


Il n'est pas évident de proposer un cadre fonctionnel dans lequel ce problème est bien posé

Condition de Dirichlet sur les particules (1)

Dans le cas stationnaire ergodique *Pour $m = 0$ et 1, on a $F_\omega = 0$.*

$$
\begin{aligned}
T^{-1}U^{NF}_{\omega,T} - \Delta_{\mathbf{y}} U^{NF}_{\omega,T} &= F_\omega \quad \text{dans } \mathscr{B}^L_{\omega,0} \backslash \Sigma_H \\
-\partial_{y_d} U^{NF}_{\omega,T} &= G_\omega \quad \text{sur } \Sigma_0 \\
U^{NF}_{\omega,T} &= 0 \quad \text{sur } \partial \mathscr{P}_\omega \\
\Big[U^{NF}_{\omega,T} \Big]_H = \alpha^D_\omega \quad \text{et} &\quad \Big[-\partial_{y_d} U^{NF}_{\omega,T} \Big]_H = \alpha^N_\omega \\
\partial_{y_d} U^{NF}_{\omega,T} + \Lambda U^{NF}_{\omega,T} &= 0 \quad \text{sur } \Sigma_L
\end{aligned}
$$



Il n'est pas évident de proposer un cadre fonctionnel dans lequel ce problème est bien posé

Idée : *On régularise le problème et on écrit le DtN pour le problème régularisé*

- *Ce problème est **bien posé** et admet une **trace stationnaire** $U^{NF}_{m,T}\big|_{\Sigma_L}$ sur Σ_L donc on peut caractériser le comportement à l'infini.*
- *On prend $T \to +\infty$: la solution régularisée converge **MAIS la trace de la limite n'est pas dans** $\mathscr{L}^2\big(\Omega, H^{1/2}_{loc}(\Sigma_L)\big)$*

On considère par la suite les problèmes régularisés en acceptant de commettre une erreur supplémentaire liée au paramètre T

Condition de Dirichlet sur les particules (2)

Dans le cas stationnaire ergodique

- ***Pour** $m = 0$ **:** on a*

$$\boxed{U^{NF}_{\omega,0,T}(\mathbf{x}_\parallel;\mathbf{y}) = -\,u^{FF}_{\omega,0}\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(\mathbf{x}_\parallel)\ \chi_{y_d>H}(\mathbf{y})}$$

Pour que $U^{NF}_{\omega,0,T} \underset{y_d\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on obtient p.s.

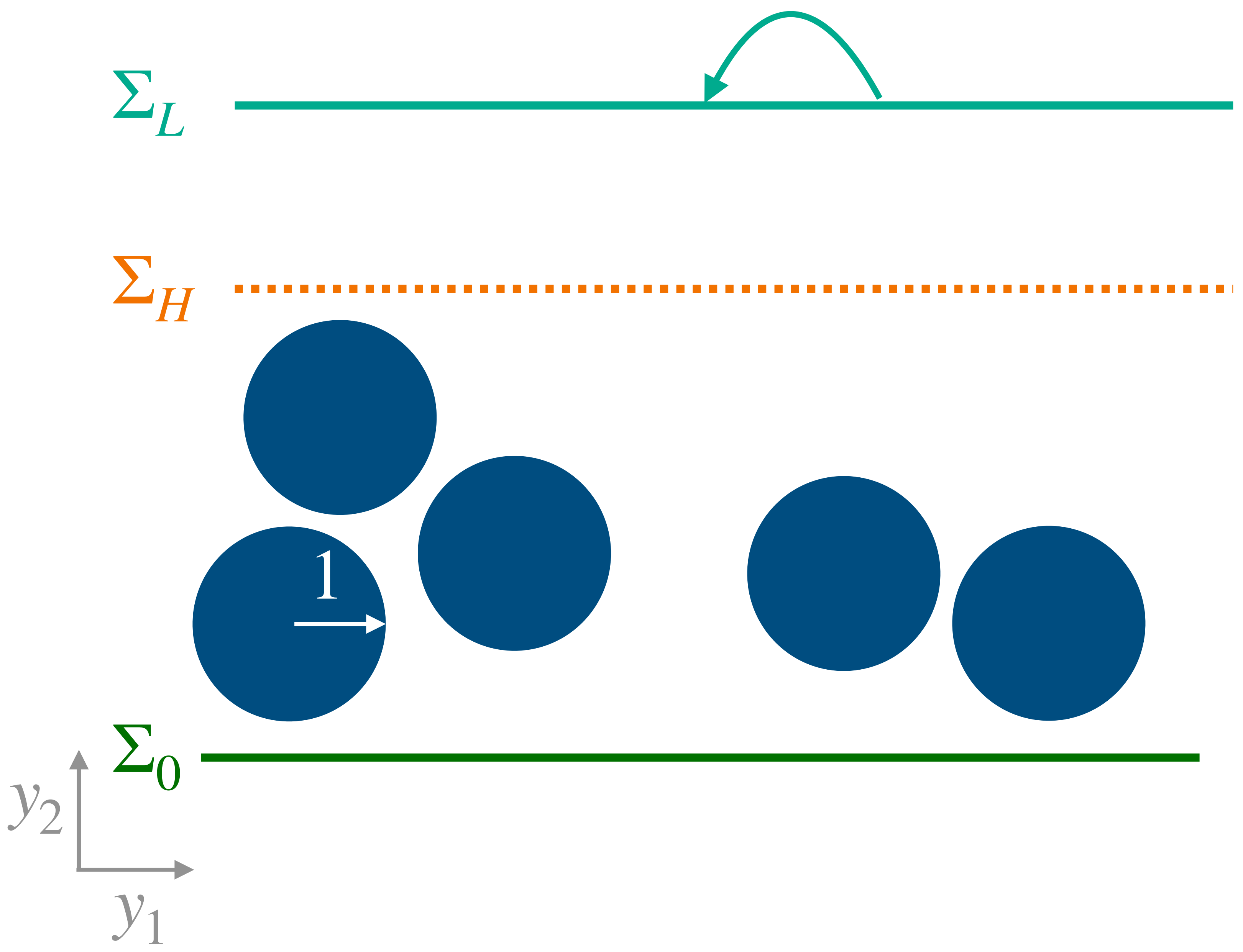
$$\boxed{u^{FF}_{\omega,0}\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(\mathbf{x}_\parallel) = 0}$$

u^{FF}_0 est indépendant de ω

- ***Pour** $m = 1$ **:** par linéarité on a*

$$\boxed{U^{NF}_{\omega,1,T}(\mathbf{x}_\parallel;\mathbf{y}) = -\,u^{FF}_{\omega,1}\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(\mathbf{x}_\parallel)\ \chi_{y_d>H}(\mathbf{y}) + \partial_{x_d}u^{FF}_0\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(\mathbf{x}_\parallel)\ \mathscr{W}^{(1)}_{\omega,0,T}(\mathbf{y})}$$

où $\mathscr{W}^{(1)}_{\omega,0,T}$ est l'unique solution de



$$T^{-1}\chi_{y_d<L}\mathscr{W}^{(1)}_{\omega,0,T} - \Delta_{\mathbf{y}}\mathscr{W}^{(1)}_{\omega,0,T} = 0 \quad \text{dans } \mathscr{B}^L_{\omega,0}$$

$$-\partial_{y_d}\mathscr{W}^{(1)}_{\omega,0,T} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0$$

$$\mathscr{W}^{(1)}_{\omega,0,T} = 0 \quad \text{sur } \partial\mathscr{P}_\omega$$

$$\Big[\mathscr{W}^{(1)}_{\omega,0,T}\Big]_H = 0 \quad \text{et} \quad \Big[-\partial_{y_d}\mathscr{W}^{(1)}_{\omega,0,T}\Big]_H = 1$$

$$\partial_{y_d}\mathscr{W}^{(1)}_{\omega,0,T} + \Lambda\mathscr{W}^{(1)}_{\omega,0,T} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_L$$

Pour que $U^{NF}_{\omega,1,T} \underset{y_d\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on obtient p.s.

$$\boxed{u^{FF}_{\omega,1}\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}} + \partial_{x_d}u^{FF}_0\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}\ c^{(1)}_0 = 0}$$

où $c^{(1)}_0 := \lim_{y_d\to+\infty}\mathscr{W}^{(1)}_{\omega,0,T} = \mathbb{E}\Big[\mathscr{W}^{(1)}_{0,T}(\,\cdot\,,L)\Big]$

u^{FF}_1 est indépendant de ω

Condition de Neumann sur les particules (1)

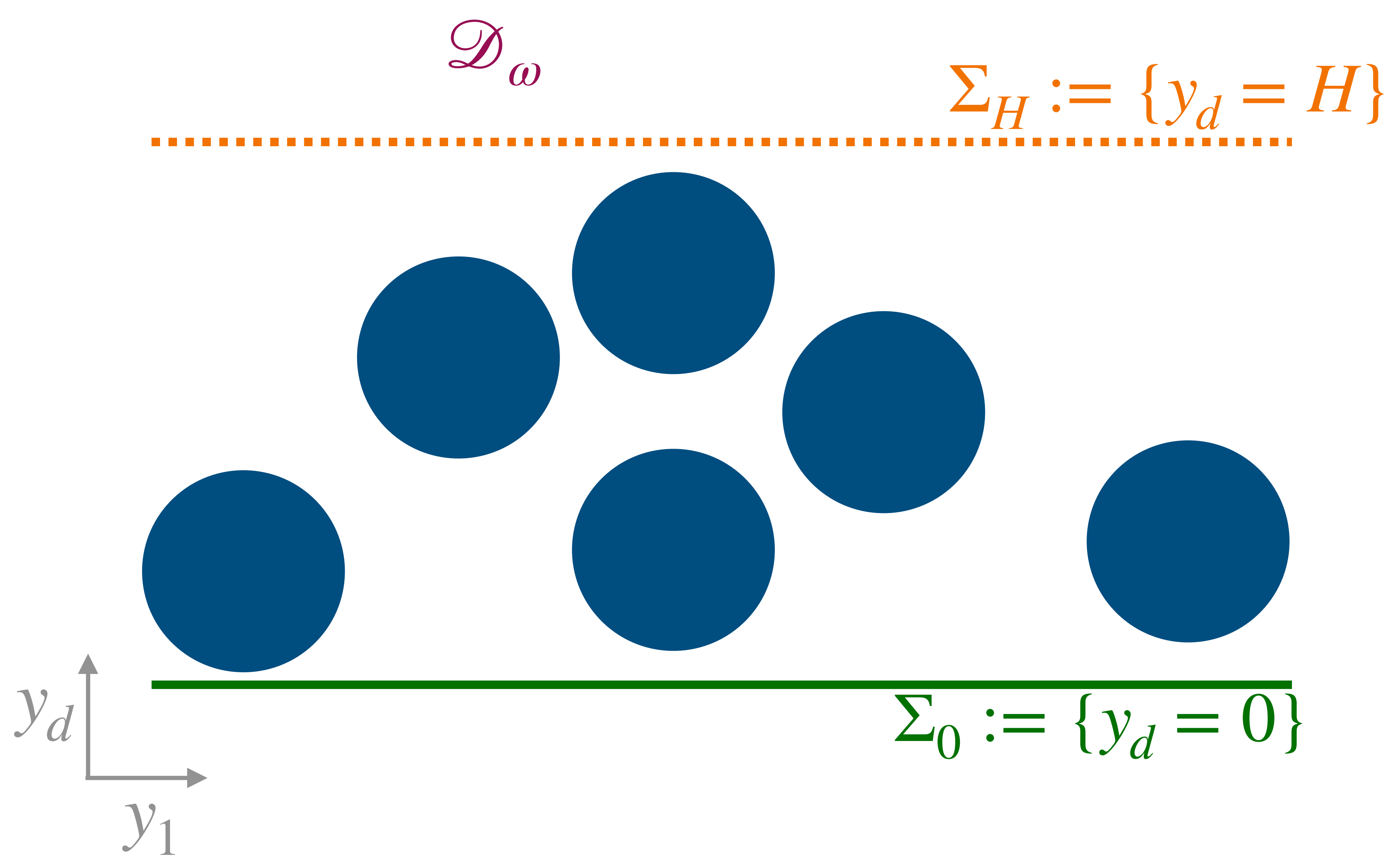
Dans le cas stationnaire ergodique

On considère les cas $m \leq 2$*.*

- $m = 0$: *Immédiatement , on a p.s* $\boxed{U^{NF}_{\omega,0} = u^{FF}_{\omega,0}\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}\left(\mathbf{x}_{\parallel}\right)\,\chi_{y_d<H}}$
- $m = 1$:

$$\begin{aligned}
-\Delta U^{NF}_{\omega,1} &= 0 \quad \text{dans } \mathscr{D}_\omega \backslash \Sigma_H \\
-\partial_{y_d} U^{NF}_{\omega,1} &= -\,ik\gamma\; u^{FF}_{\omega,0}\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}} \quad \text{sur } \Sigma_0 \\
\nabla_{\mathbf{y}} U^{NF}_{\omega,1}\cdot\vec{n} &= -\,\nabla_{\mathbf{x}_\parallel} u^{FF}_{\omega,0}\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}\cdot\vec{n}_\parallel \quad \text{sur } \partial\mathscr{P}_\omega
\end{aligned}$$

$$\left[U^{NF}_{\omega,1}\right]_H = -\,u^{FF}_{\omega,1}\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}} \quad \text{et} \quad \left[-\,\partial_{y_d} U^{NF}_{\omega,1}\right]_H = \partial_{x_d} u^{FF}_{\omega,0}\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}$$



- *Approche très similaire au cas Dirichlet*

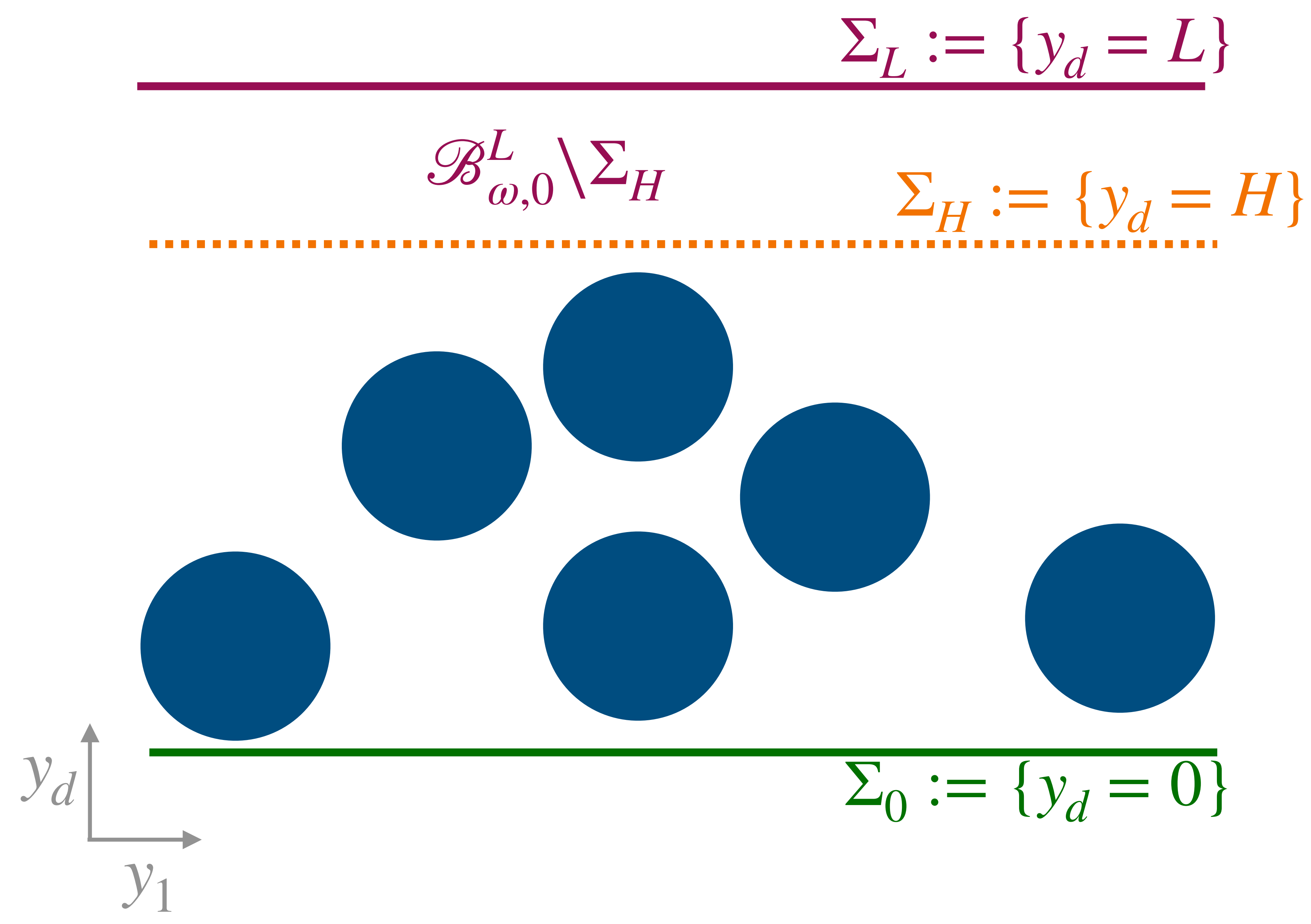
Condition de Neumann sur les particules (1)

Dans le cas stationnaire ergodique

On considère les cas $m \leq 2$.

- $m = 0$: *Immédiatement , on a p.s* $\boxed{U^{NF}_{\omega,0} = u^{FF}_{\omega,0}\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(\mathbf{x}_{\parallel})\ \chi_{y_d<H}}$
- $m = 1$:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} T^{-1}U^{NF}_{\omega,1,T} - \Delta_{\mathbf{y}} U^{NF}_{\omega,1,T} &=& 0 \quad \text{dans } \mathscr{B}^L_{\omega,0}\backslash\Sigma_H \\ -\partial_{y_d} U^{NF}_{\omega,1,T} &=& -\,ik\gamma\ u^{FF}_{\omega,0}\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}} \quad \text{sur } \Sigma_0 \\ \nabla_{\mathbf{y}} U^{NF}_{\omega,1,T}\cdot\vec{n} &=& -\,\nabla_{\mathbf{x}_\parallel} u^{FF}_{\omega,0}\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}\cdot\vec{n}_\parallel \quad \text{sur } \partial\mathscr{P}_\omega \\ \Big[U^{NF}_{\omega,1,T}\Big]_H = -\,u^{FF}_{\omega,1}\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}} & \text{et} & \Big[-\,\partial_{y_d} U^{NF}_{\omega,1,T}\Big]_H = \partial_{x_d} u^{FF}_{\omega,0}\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}} \\ \partial_{y_d} U^{NF}_{\omega,1,T} + \Lambda U^{NF}_{\omega,1,T} &=& 0 \quad \text{sur } \Sigma_L \end{array}}$$



- *Approche très similaire au cas Dirichlet*

On régularise le problème et on écrit le DtN pour le problème régularisé

- *Ce problème est* ***bien posé*** *et* $U^{NF}_{1,T}$ *admet une* ***trace stationnaire*** *sur* Σ_L *donc on peut caractériser le comportement à l'infini.*
- *On prend* $T \to +\infty$ *: la solution régularisée* ***admet une limite seulement si la condition dite de compatibilité est vérifiée***

$$\mathbb{E}\Big[-\,ik\gamma\ u^{FF}_{\omega,0}\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}} + \partial_{x_d} u^{FF}_{\omega,0}\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}\Big] = 0$$

MAIS *la solution construite n'est pas nécessairement stationnaire.*

On considère par la suite les problèmes régularisés en acceptant de commettre une erreur supplémentaire liée à T

Condition de Neumann sur les particules (2)

Dans le cas stationnaire ergodique

On choisit d'imposer p.s.

$$-\partial_{x_d} u^{FF}_{\omega,0}\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}} + ik\gamma\; u^{FF}_{\omega,0}\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}} = 0$$

u^{FF}_0 ***est indépendant de*** ω

Par linéarité, on a

$$U^{NF}_{\omega,1,T}(\mathbf{x}_\parallel;\mathbf{y}) = -\,u^{FF}_{\omega,1}\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(\mathbf{x}_\parallel)\,\chi_{\mathscr{B}^H_{\omega,0}}(\mathbf{y}) + u^{FF}_0\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(\mathbf{x}_\parallel)\,\mathscr{U}^{(1)}_{\omega,0,T} + \sum_{i=1,2}\partial_{x_i} u^{FF}_0\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(\mathbf{x}_\parallel)\,\mathscr{U}^{(1)}_{\omega,i,T}(\mathbf{y})$$

où $\mathscr{U}^{(1)}_{\omega,0,T}$ *vérifie :*

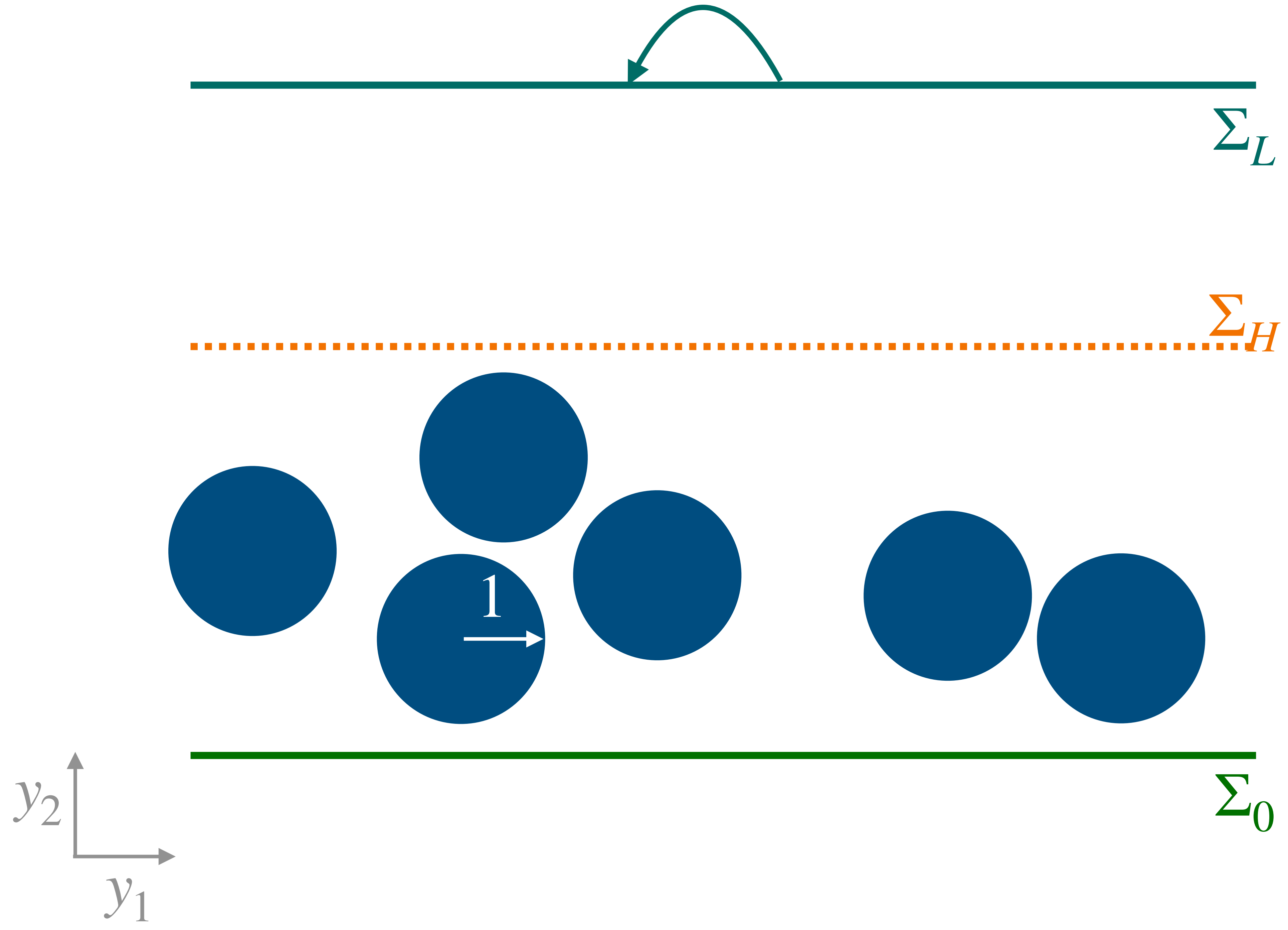
$$T^{-1}\chi_{y_d<L}\,\mathscr{U}^{(1)}_{\omega,0,T} - \Delta_{\mathbf{y}}\mathscr{U}^{(1)}_{\omega,0,T} = 0 \quad \text{dans } \mathscr{B}^L_{\omega,0}\backslash\Sigma_H$$

$$-\partial_{y_d}\mathscr{U}^{(1)}_{\omega,0,T} = -\,ik\gamma \quad \text{sur } \Sigma_0$$

$$\nabla_{\mathbf{y}}\mathscr{U}^{(1)}_{\omega,0,T}\cdot\vec{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\mathscr{P}_\omega$$

$$\left[\mathscr{U}^{(1)}_{\omega,0,T}\right]_H = 0 \quad \text{et} \quad \left[-\,\partial_{y_d}\mathscr{U}^{(1)}_{\omega,0,T}\right]_H = ik\gamma$$

$$\partial_{y_d}\mathscr{U}^{(1)}_{\omega,0,T} + \Lambda\mathscr{U}^{(1)}_{\omega,0,T} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_L$$



Condition de Neumann sur les particules (3)

Dans le cas stationnaire ergodique

- $m = 2$:

$$T^{-1}\chi_{y_d<L}\, U^{NF}_{\omega,2} - \Delta_{\mathbf{y}} U^{NF}_{\omega,2} = 2\nabla_{\mathbf{y}_\parallel}\cdot\nabla_{\mathbf{x}_\parallel} U^{NF}_{\omega,1,T} + \left(\Delta_{\mathbf{x}_\parallel} u_0^{FF}\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}} + k^2\, u_0^{FF}\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}\right)\chi_{\mathscr{B}^H_{\omega,0}} \quad \text{dans } \mathscr{D}_\omega\backslash\Sigma_H$$

$$-\partial_{y_d} U^{NF}_{\omega,2} = -ik\gamma\, U^{NF}_{\omega,1,T} - ik\gamma\, u^{FF}_{\omega,1}\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}} \quad \text{sur } \Sigma_0$$

$$\nabla_{\mathbf{y}} U^{NF}_{\omega,2}\cdot\vec{n} = -\nabla_{\mathbf{x}_\parallel} U^{NF}_{\omega,1,T}\cdot\vec{n}_\parallel - \nabla_{\mathbf{x}_\parallel} u^{FF}_{\omega,1}\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}\cdot\vec{n}_\parallel \quad \text{sur } \partial\mathscr{P}_\omega$$

$$\left[U^{NF}_{\omega,2}\right]_H = -u^{FF}_{\omega,2}\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}} \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_d} U^{NF}_{\omega,2}\right]_H = \partial_{x_d} u^{FF}_{\omega,1}\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}$$

Le terme source ne vérifie pas l'hypothèse de décroissance ! On ne peut pas utiliser la représentation intégrale et le DtN.

On dérive formellement la méthode

Ce problème admet une limite quand $T \to +\infty$ seulement si on impose p.s. que

$$-\partial_{x_d} u^{FF}_{\omega,1}\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}} + ik\gamma\, u^{FF}_{\omega,1}\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}} = a_0^{(2)} u_0^{FF}\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}} + \sum_{i=1,2} a_{1,i}^{(2)}\partial_{x_i} u_0^{FF}\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}} + a_{2,i}^{(2)}\partial^2_{x_i} u_0^{FF}\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}$$

u_1^{FF} est indépendante de ω

où les coefficients $a_0^{(2)}$, $a_{1,i}^{(2)}$ et $a_{2,i}^{(2)}$ sont exprimés comme des moyennes des fonctions profils $\mathscr{U}^{(1)}_{i,T}$ définies dans le slide précédent.

On peut montrer que le terme source est décroissant sous des hypothèses supplémentaires sur la loi de distribution.

Ces hypothèses sont vérifiées par la loi de Poisson utilisée pour les résultats numériques

Etude du cas scalaire

- *Présentation du modèle*
- *Développement asymptotique à 2 échelles*
- *Problèmes de champ proche dans le cas périodique*
- *Problèmes de champ proche dans le cas stationnaire et ergodique*
- *Modèles effectifs*
- *Simulations numériques*

Modèles effectifs

Modèle à l'ordre 1

Dirichlet

$$
\begin{aligned}
&-\Delta u_0^{FF} - k^2 u_0^{FF} = f \quad \text{dans } \mathbb{R}^{d-1} \times (\varepsilon H, +\infty) \\
&u_0^{FF} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_{\varepsilon H} \\
&u_0^{FF} \ \text{vérifie la condition UPRC}
\end{aligned}
$$

Les particules sont remplacées par un plan conducteur

Neumann

$$
\begin{aligned}
&-\Delta u_0^{FF} - k^2 u_0^{FF} = f \quad \text{dans } \mathbb{R}^{d-1} \times (\varepsilon H, +\infty) \\
&-\partial_{x_d} u_0^{FF} + ik\gamma\, u_0^{FF} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_{\varepsilon H} \\
&u_0^{FF} \ \text{vérifie la condition UPRC}
\end{aligned}
$$

Les particules sont remplacées par la CI de l'objet sur $\Sigma_{\varepsilon H}$

Les particules ne sont pas prises en compte !

Modèle à l'ordre 2

Dirichlet

$$
\begin{aligned}
&-\Delta u_1^{FF} - k^2 u_1^{FF} = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^{d-1} \times (\varepsilon H, +\infty) \\
&u_1^{FF} = c_0^{(1)} \partial_{x_d} u_0^{FF} \quad \text{sur } \Sigma_{\varepsilon H} \\
&u_1^{FF} \ \text{vérifie la condition UPRC}
\end{aligned}
$$

Neumann

$$
\begin{aligned}
&-\Delta u_1^{FF} - k^2 u_1^{FF} = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^{d-1} \times (\varepsilon H, +\infty) \\
&-\partial_{x_d} u_1^{FF} + ik\gamma u_1^{FF} = a_0^{(2)} u_0^{FF} + \sum_{i=1,2} a_{1,i}^{(2)} \partial_{x_i} u_0^{FF} + a_{2,i}^{(2)} \partial_{x_i}^2 u_0^{FF} \quad \text{sur } \Sigma_{\varepsilon H} \\
&u_1^{FF} \ \text{vérifie la condition UPRC}
\end{aligned}
$$

$$v_2^\varepsilon \approx u_0^{FF} + \varepsilon\, u_1^{FF}$$

Dirichlet

$$
\begin{aligned}
&-\Delta v_2^\varepsilon - k^2 v_2^\varepsilon = f \quad \text{dans } \mathbb{R}^{d-1} \times (\varepsilon H, +\infty) \\
&-\varepsilon c_0^{(1)} \partial_{x_d} v_2^\varepsilon + v_2^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Sigma_{\varepsilon H} \\
&v_2^\varepsilon \ \text{vérifie la condition UPRC}
\end{aligned}
$$

Si $c_0^{(1)} > 0$, ce problème est bien posé

(dans le cas périodique : $c_0^{(1)} > 0$ pour H assez grand).

Neumann

$$
\begin{aligned}
&-\Delta v_2^\varepsilon - k^2 v_2^\varepsilon = f \quad \text{dans } \mathbb{R}^{d-1} \times (\varepsilon H, +\infty) \\
&-\partial_{x_d} v_2^\varepsilon + \left(ik\gamma - \varepsilon a_0^{(2)}\right) v_2^\varepsilon - \varepsilon \sum_{i=1,2} \left(a_{1,i}^{(2)} \partial_{x_i} v_2^\varepsilon + a_{2,i}^{(2)} \partial_{x_i}^2 v_2^\varepsilon \right) = 0 \quad \text{sur } \Sigma_{\varepsilon H} \\
&v_2^\varepsilon \ \text{vérifie la condition UPRC}
\end{aligned}
$$

Pour $i = 1,2$, si $a_{2,i}^{(2)} > 0$, ce problème est bien posé.

$a_{2,i}^{(2)} > 0$ pour H assez grand.

Estimations d'erreurs

Dans le cas périodique :

La convergence exponentielle des champs proches est très importante pour établir les estimations d'erreurs.

Pour tout ouvert borné $\mathcal{O}$ *de* $\mathbb{R} \times \left(\varepsilon H, +\infty\right)$

$$\| u^{\varepsilon}(x_1, x_2) - v_2^{\varepsilon}(x_1, x_2) \|_{H^1(\mathcal{O})} = O\left(\varepsilon^2\right)$$

Nous pouvons ensuite approcher $U_0^{NF} + \varepsilon U_1^{NF}$ *à partir de* v_2^{ε} *et des fonctions profils et on obtient*

$$\left\| u^{\varepsilon}(x_1, x_2) - v_2^{\varepsilon}(x_1, x_2) - \left(U_0^{NF} + \varepsilon\ U_1^{NF}\right)\left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right) \right\|_{H^1(\mathcal{D}^{\varepsilon} \backslash \Sigma_H)} = O\left(\varepsilon^2\right)$$

Dans le cas stationnaire ergodique :

Dans le cas Dirichlet

Soit $L' > H$ *et* $\mathcal{B}_{\omega,0,R}^{L'} := \{ \square_R \times (0, L') \backslash \overline{\mathcal{P}_{\omega}} \}$

$$\left\| u^{\varepsilon} - \left(u_0^{FF} + \varepsilon u_1^{FF} + \varepsilon U_{1,T}^{NF}\right) \right\|_{\mathcal{L}^2(\Omega, H_0^1(\mathcal{B}_{\omega,0,R}^{L'}))} \leq O\left(2\varepsilon^{d/2+1}\sqrt{T} + \frac{\varepsilon^{d/2-1}}{\sqrt{T}} + \varepsilon^{d/2+1} + \varepsilon\right) + o\left(\varepsilon + \varepsilon^2\right)$$

Si on choisit $T = \varepsilon^{-2}$

$$\left\| u^{\varepsilon} - \left(u_0^{FF} + \varepsilon u_1^{FF} + \varepsilon U_{1,T}^{NF}\right) \right\|_{\mathcal{L}^2(\Omega, H_0^1(\mathcal{B}_{\omega,0,R}^{L'}))} = O\left(\varepsilon\right)$$

Nous ne pouvons pas sans hypothèse quantitative supplémentaire sur la loi de distribution améliorer cette estimation.

Etude du cas scalaire

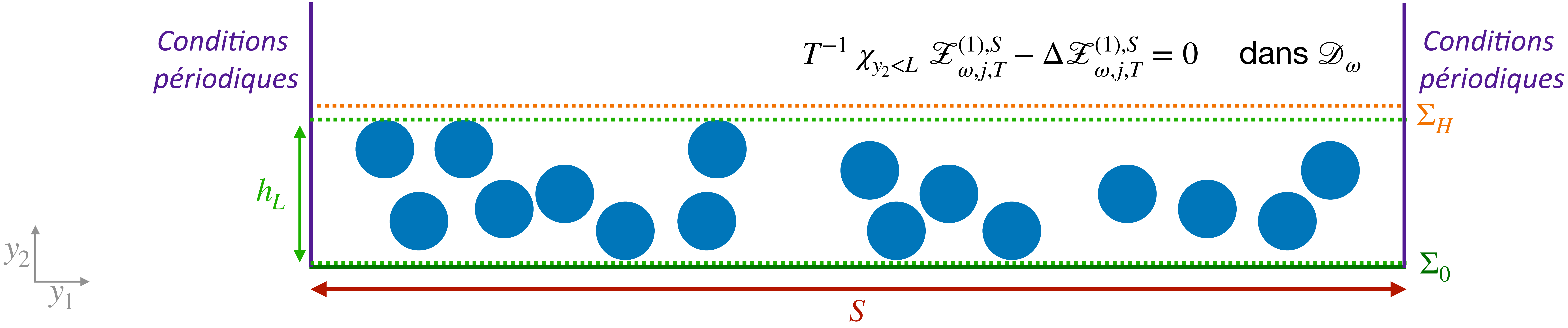
- *Présentation du modèle*
- *Développement asymptotique à 2 échelles*
- *Problèmes de champ proche dans le cas périodique*
- *Problèmes de champ proche dans le cas stationnaire et ergodique*
- *Modèles effectifs*
- *Simulations numériques*

XLiFE++

Calcul des fonctions profils (1)

En pratique pour obtenir les fonctions profils $\mathscr{Z}^{(1)}_{\omega,j,T}$ ($\mathscr{Z} = \mathscr{W}$ ou $\mathscr{U}$):

- *On **tronque dans la direction** $y_1 \in \left(-\frac{S}{2}, \frac{S}{2}\right)$ et on prescrit des **conditions périodiques** sur les bords.*
- *On génère les centres des particules à l'aide d'un **processus point de Poisson** :*
  - *Soit $\mathscr{L}^{h_L}_T$ une bande de taille $S \times h_L$ et un taux de remplissage $\rho \in (0,1)$*
  - *On se donne un nombre moyen de particules* $\nu = \rho \dfrac{\mathscr{A}ire\left(\mathscr{L}^{h_L}_T\right)}{\mathscr{A}ire\left(particule\right)}$
  - *Le nombre de particules N_{part} dans $\mathscr{L}^{h_L}_T$ suit une distribution de Poisson de paramètre ν :* $\mathbb{P}\left(N_{part} = m\right) = e^{-\nu}\dfrac{\nu^m}{m!}$
  - *Nous tirons les centres aléatoirement dans $\mathscr{L}^{h_L}_T$, suivant 2 lois uniformes, en ne conservant que les centres ayant une distance minimale avec les autres particules.*



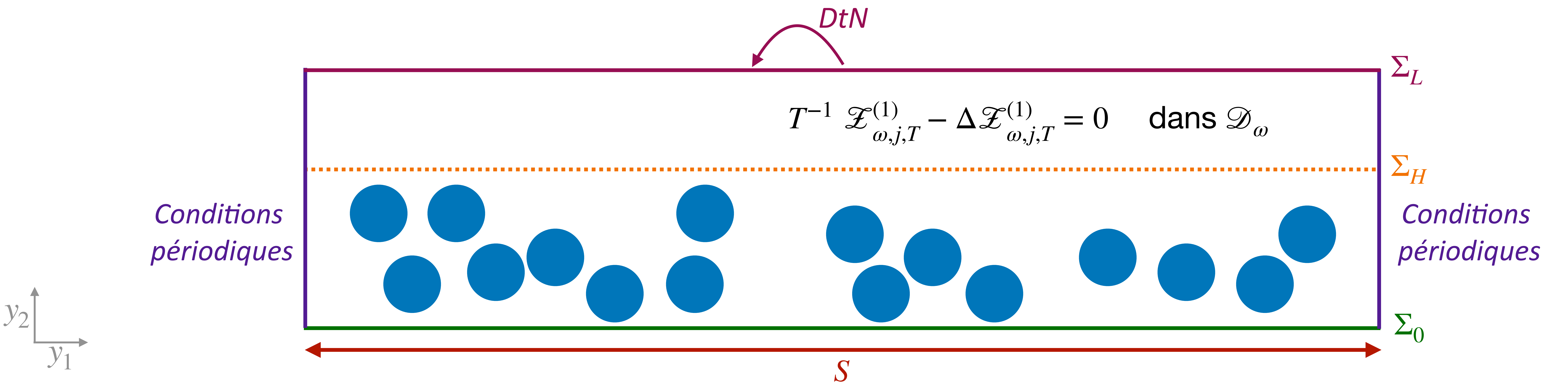
Calcul des fonctions profils (2)

En pratique pour obtenir les fonctions profils $\mathscr{Z}^{(1)}_{\omega,j,T}$ ($\mathscr{Z} = \mathscr{W}$ ou $\mathscr{U}$):

- *Nous **tronquons dans la direction y_2** avec un opérateur de Dirichlet-to-Neumann sur une frontière fictive $\Sigma_L := \{y_2 = L\}$.*

$$\nabla_{\mathbf{y}} \mathscr{Z}^{(1),S}_{\omega,j,T} \cdot \vec{n} = -\frac{2\pi}{S} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |m| \left(\mathscr{Z}^{(1),S}_{\omega,j,T}, \phi_m\right)_{L^2(\Sigma_L)} \phi_m(y_1) \ , \qquad \phi_m(y_1) = \frac{1}{\sqrt{S}} e^{\frac{2im\pi}{S} y_1}$$

  - *Il est nécessaire de **tronquer la série** $\sum_{m=-N}^{N}$ et **prendre suffisamment de termes** pour résoudre les fonctions profils. Pour cela, on définit un paramètre noté $e_1 = 10^{-6}$ tel que :* $N \geq \dfrac{T \log(e_1)}{2\pi(L-H)} - 1$



Calcul des coefficients du modèle

Exemple avec le coefficient

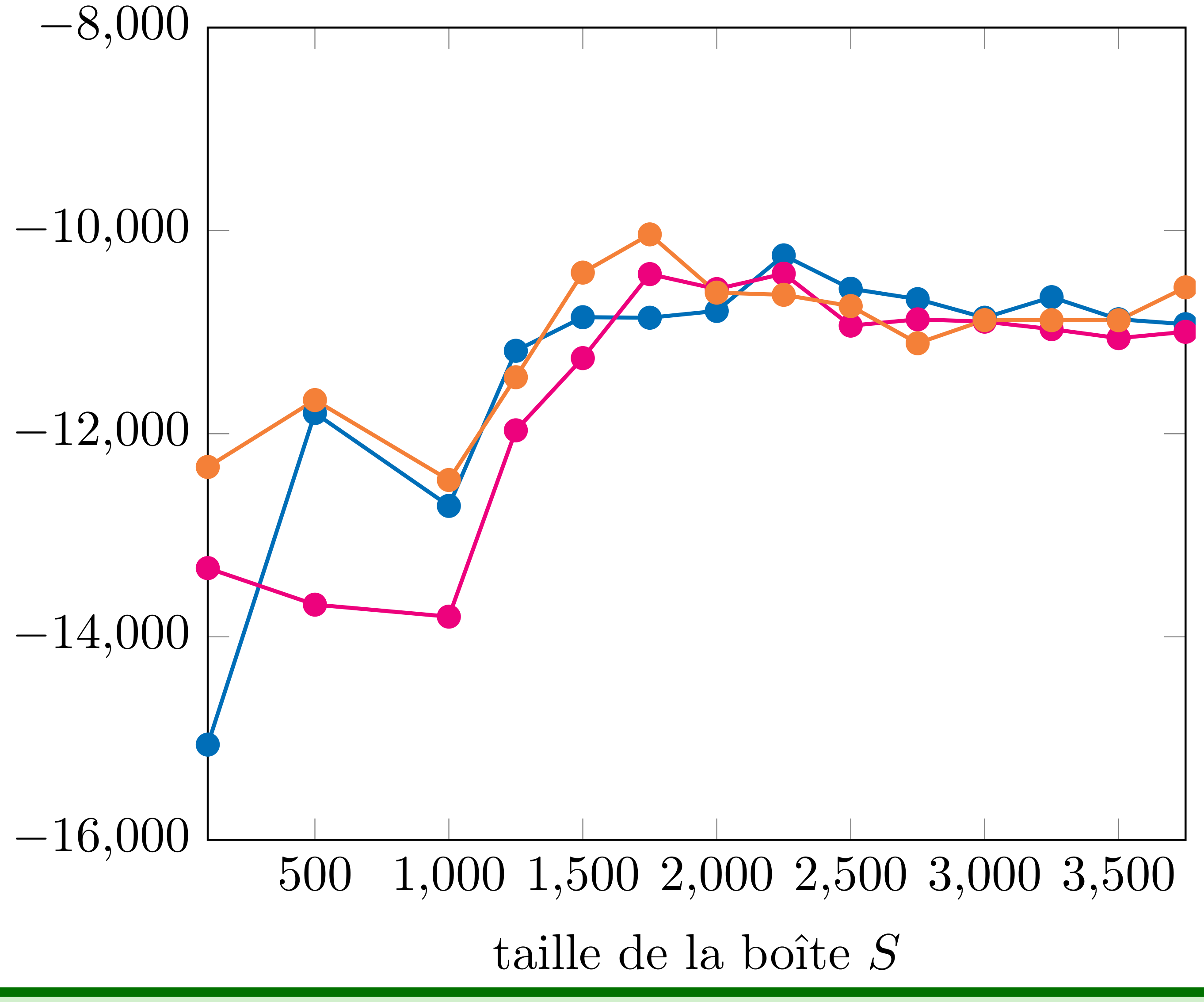
$$a_0^{(2)} = \mathbb{E}\left[k^2 \int_0^1 \int_0^H 1_{\mathscr{D}_\omega}\, \mathbf{dy} - ik\gamma\ \mathscr{U}^{(1)}_{\omega,0,T}(\,\cdot\,,0)\right] \qquad \Sigma^{\#}_{P,S} = \left\{ y_1 \in \left(-\frac{S}{2},\frac{S}{2}\right),\, y_2 = P \right\}$$

Par stationnarité et ergodicité

$$a_0^{(2)} \approx \ \mathbb{E}\left[\frac{k^2}{S}\int_{-S/2}^{S/2}\int_0^H 1_{\mathscr{D}_\omega}\,\mathbf{dy} - \frac{ik\gamma}{S}\int_{\Sigma^{\#}_{0,S}} \mathscr{U}^{(1),S}_{\omega,0,T}(y_1,0)\,\mathrm{d}y_1\right] \approx \lim_{S\to+\infty}\left(\frac{k^2}{S}\int_{-S/2}^{S/2}\int_0^H 1_{\mathscr{D}_\omega}\,\mathbf{dy} - \frac{ik\gamma}{S}\int_{\Sigma^{\#}_{0,S}} \mathscr{U}^{(1),S}_{\omega,0,T}(y_1,0)\,\mathrm{d}y_1\right)$$

1^{ere} ***méthode :*** *prendre une très grande boîte S pour une réalisation ω*

$$a_0^{(2)} \approx \frac{1}{S}\left(k^2\left|\mathscr{B}^H_{\omega,0,S}\right| - ik\gamma\int_{\Sigma^{\#}_{0,S}} \mathscr{U}^{(1),S}_{\omega,0,T}(y_1,0)\,\mathrm{d}y_1\right)$$

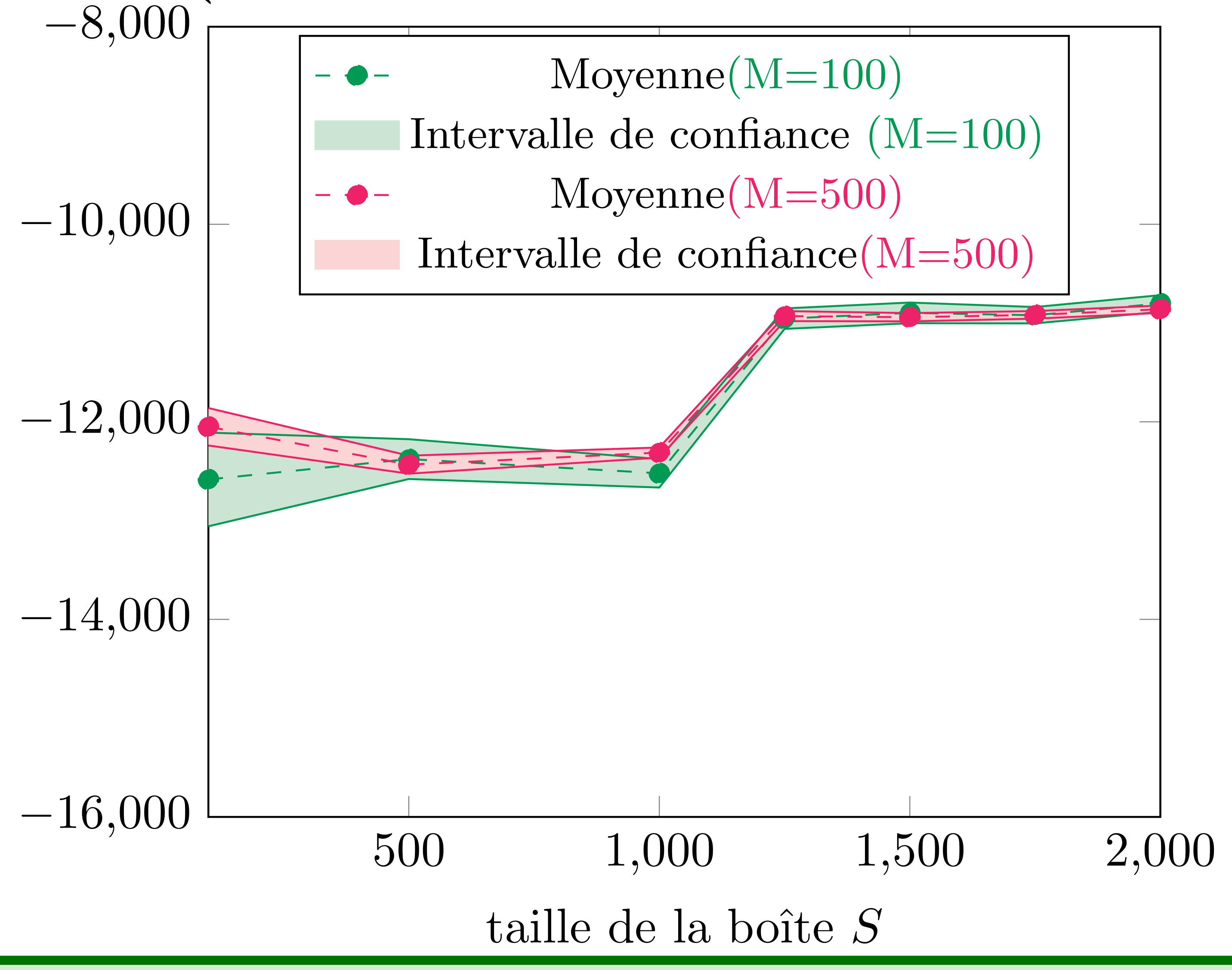


où

$$\mathscr{B}^H_{\omega,0,S} = \left(-\frac{S}{2},\frac{S}{2}\right)\times(0,H)\backslash\overline{\mathscr{P}_\omega}$$

2^{eme} ***méthode :*** ***Approximation de Monte Carlo*** *pour un S grand et M réalisations i.i.d .*

$$a_0^{(2)} \approx \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{S}\left(k^2\left|\mathscr{B}^H_{\omega,0,S}\right| - ik\gamma\int_{\Sigma^{\#}_{0,S}} \mathscr{U}^{(1),S}_{\omega,0,T}(y_1,0)\,\mathrm{d}y_1\right)$$



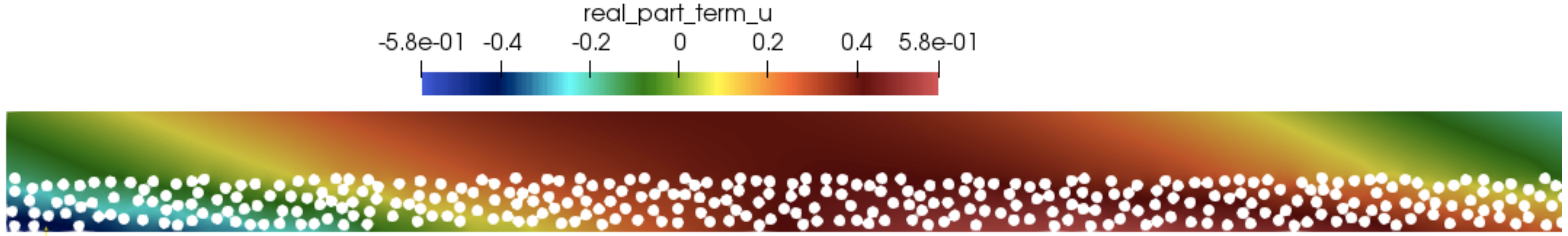
On peut jouer sur la taille de la boîte S et le nombre de réalisations pour accélérer la convergence !

Validations numériques

Paramètres : $\lambda = 15\text{cm}, \theta = \pi/3, \gamma = 1 + i$, *Polar TM*

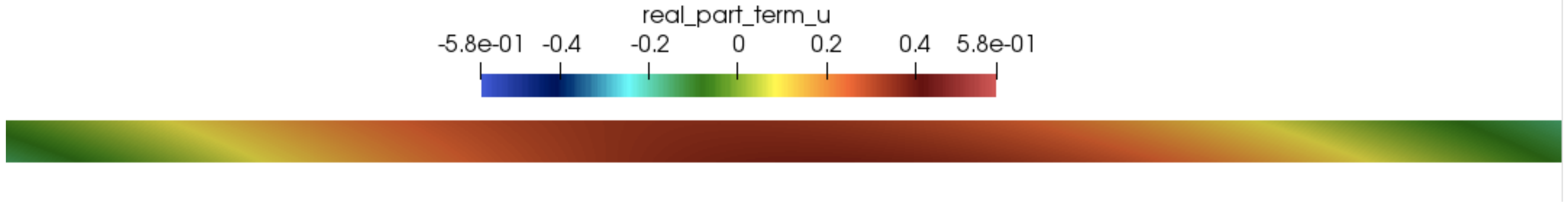
Validation qualitative

$$\varepsilon = 10^{-4}\text{m},\ \rho = 0.4,\ h_L = 10,\ L = 20,\ H = 13$$



Solution de référence (Partie réelle du champ diffracté)

$$S_{ref} = 2000$$



Solution du modèle effectif au dessus de εH

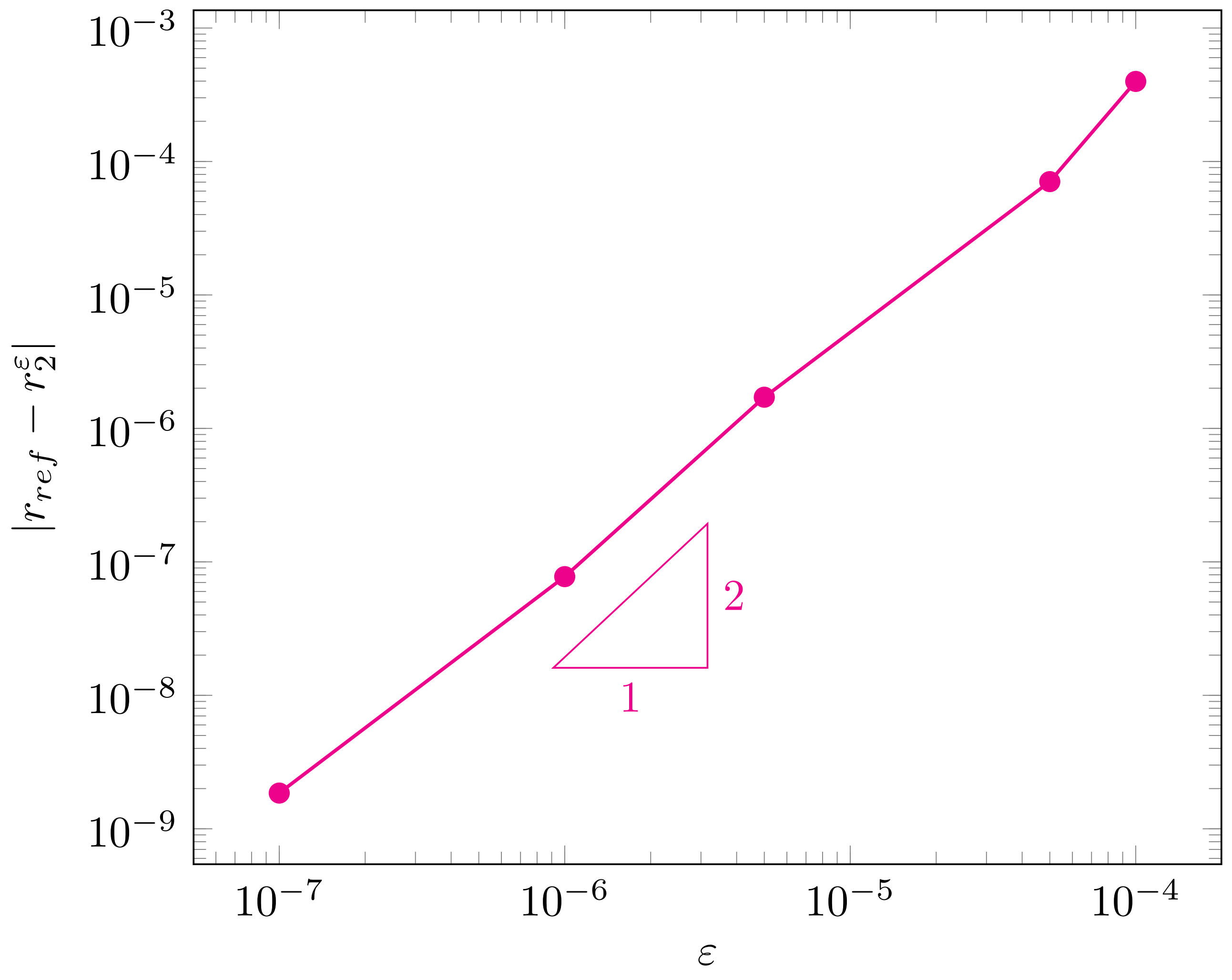
(Partie réelle du champ diffracté)

$$S_{eff} = 1500$$

Validation quantitative

$$S_{ref} = 2000,\ S_{eff} = 1500$$

$$r_2^\varepsilon = \frac{ik_2 - \left(ik\gamma - \varepsilon k^2 a_0^{(2)}\right) + \varepsilon k_1\left(ika_1^{(2)} - a_2^{(2)}k_1\right)}{ik_2 + \left(ik\gamma - \varepsilon k^2 a_0^{(2)}\right) - \varepsilon k_1\left(ika_1^{(2)} - a_2^{(2)}k_1\right)} e^{ik_2\varepsilon H}$$



Erreur sur le coefficient de réflexion en $x_2 = \varepsilon H$

Evolution du coefficient de réflexion (1)

On considère le cas d'une condition de Neumann, $\gamma = 1$ et $\theta = 0$ (incidence normale, $k_2 = k$)

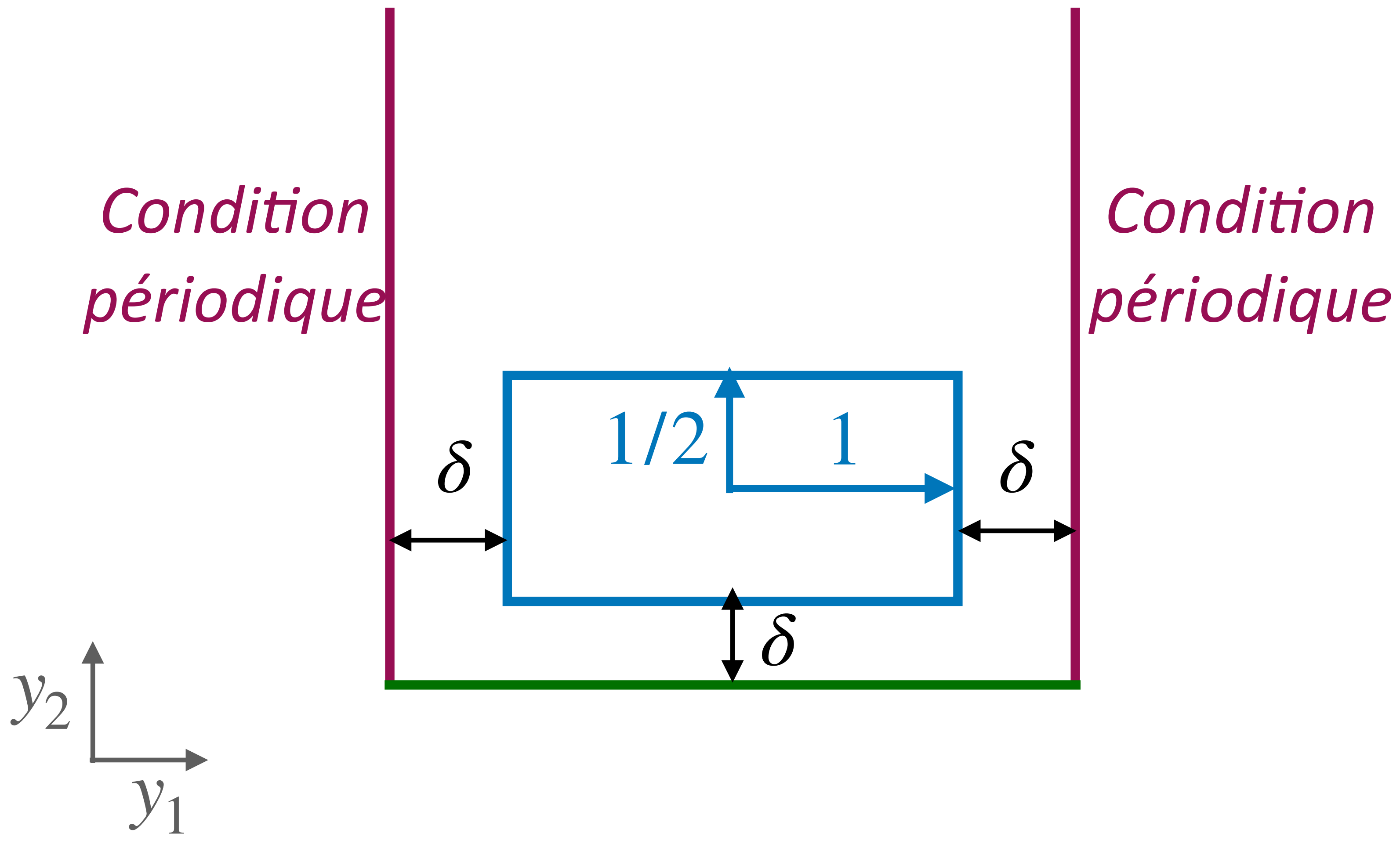
$$r_2^{\varepsilon}(k_1, k_2) = \frac{ik_2 - \left(ik\gamma - \varepsilon k^2 a_0^{(2)}\right) + \varepsilon k_1\left(ika_1^{(2)} - a_2^{(2)}k_1\right)}{ik_2 + \left(ik\gamma - \varepsilon k^2 a_0^{(2)}\right) - \varepsilon k_1\left(ika_1^{(2)} - a_2^{(2)}k_1\right)} e^{ik_2\varepsilon H}$$

✦ ***Sans particules :*** *On a une **structure transparente*** $(|r| = 0)$

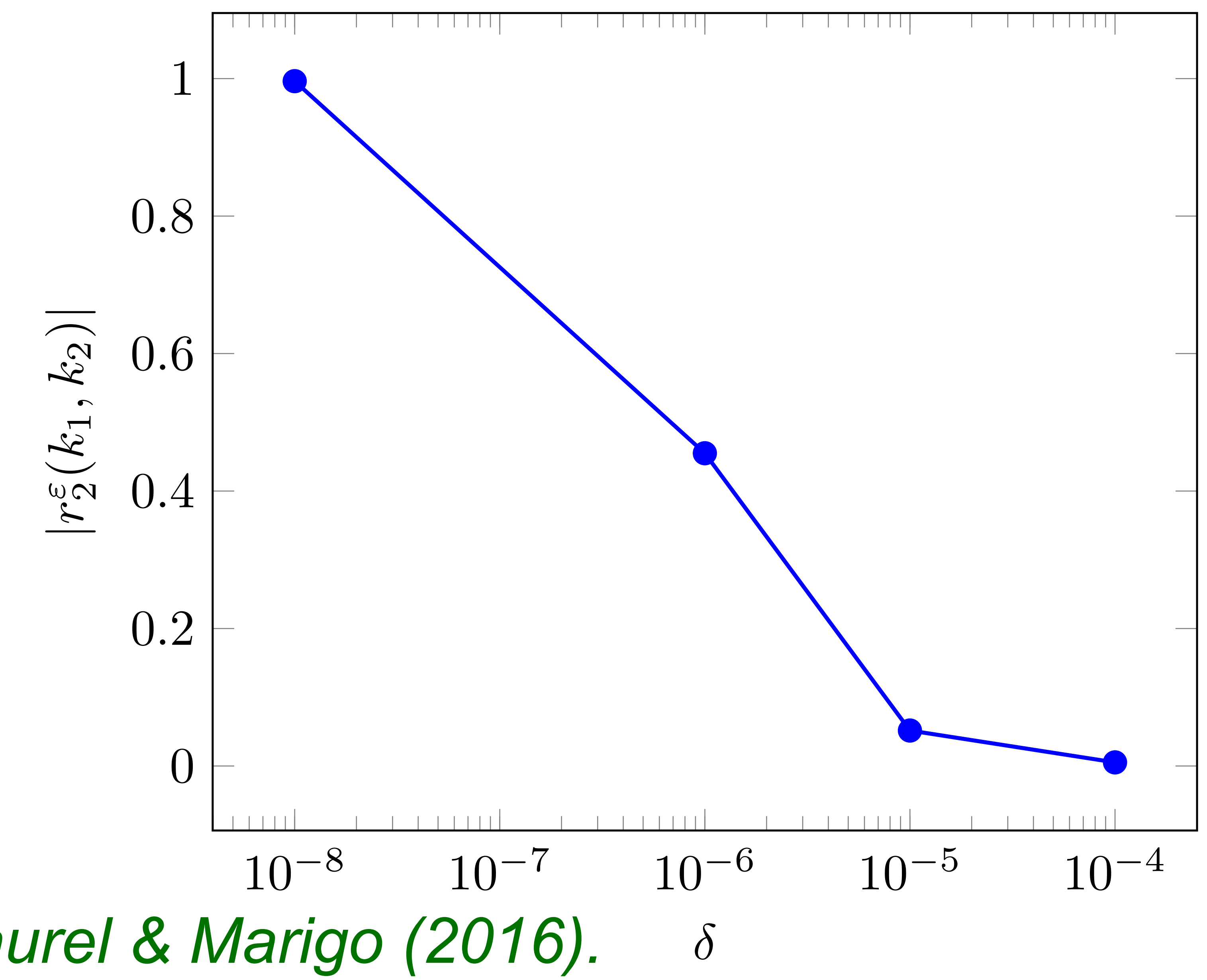
✦ ***Avec particules :*** $\left|r_2^{\varepsilon}(0,k)\right| = \dfrac{\varepsilon k^2 a_0^{(2)}}{2ik - \varepsilon k^2 a_0^{(2)}}$

Objectif : *mettre en évidence le passage d'une **structure transparente*** $(|r| = 0)$ *à une **structure conductrice*** $(|r| = 1)$

Impact de la distance entre les particules



$\varepsilon = 5.10^{-8}$m, $\lambda = 30$cm

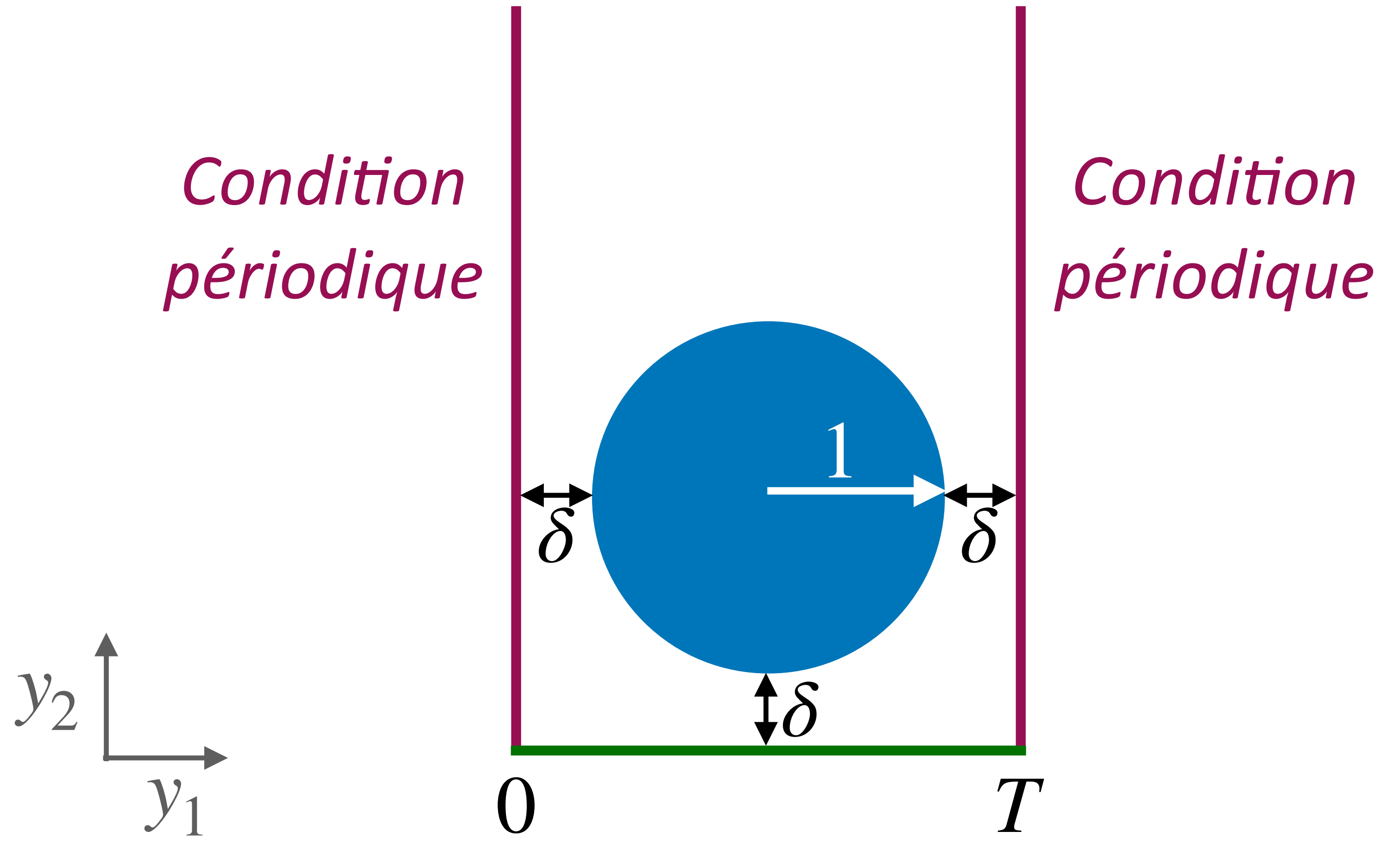


Maurel & Marigo (2016).

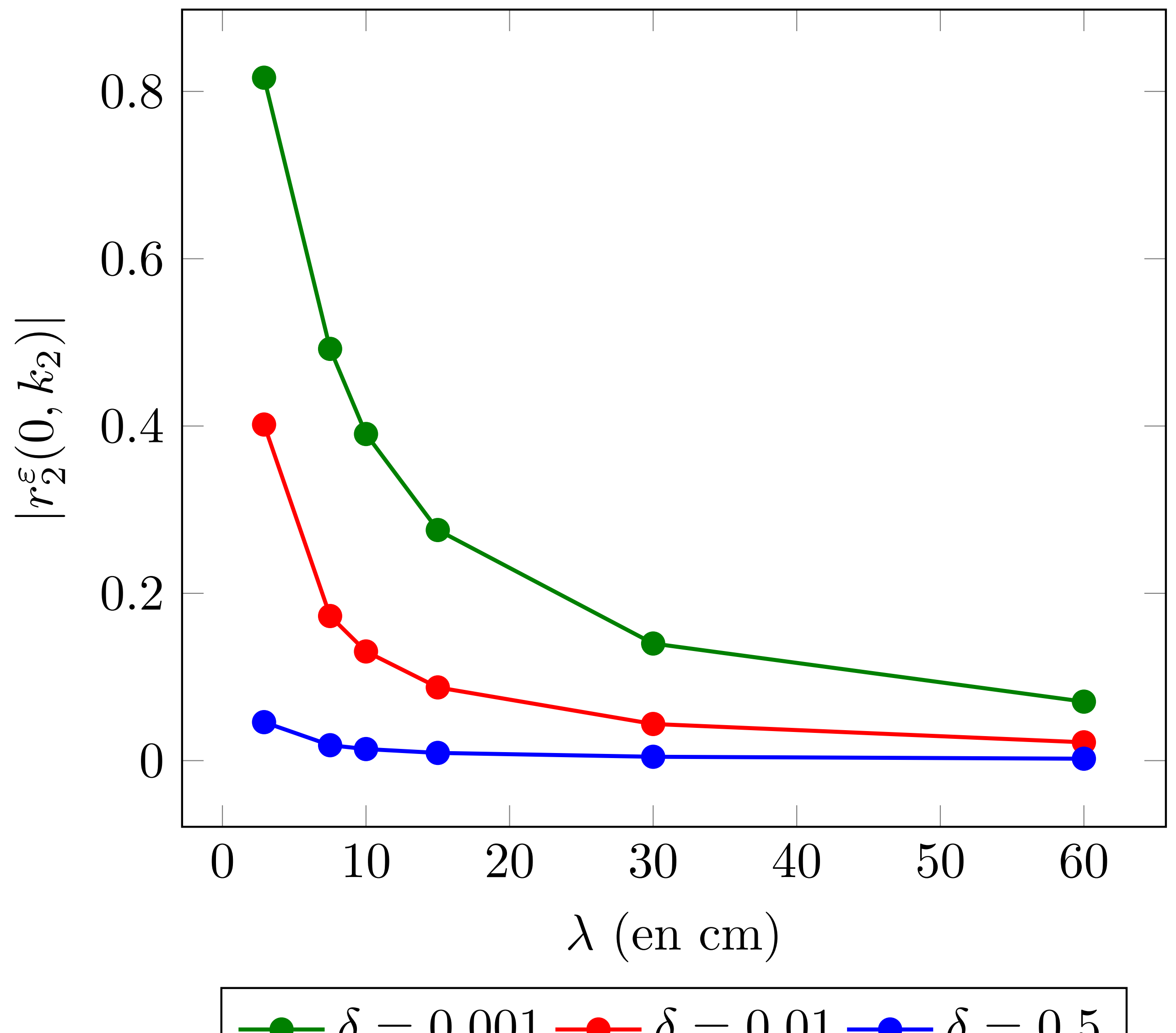
Evolution du coefficient de réflexion (2)

Impact de la fréquence

Paramètres : $\varepsilon = 10^{-4}\text{m}$ **,** $Z = 1$**,** $\theta = 0$

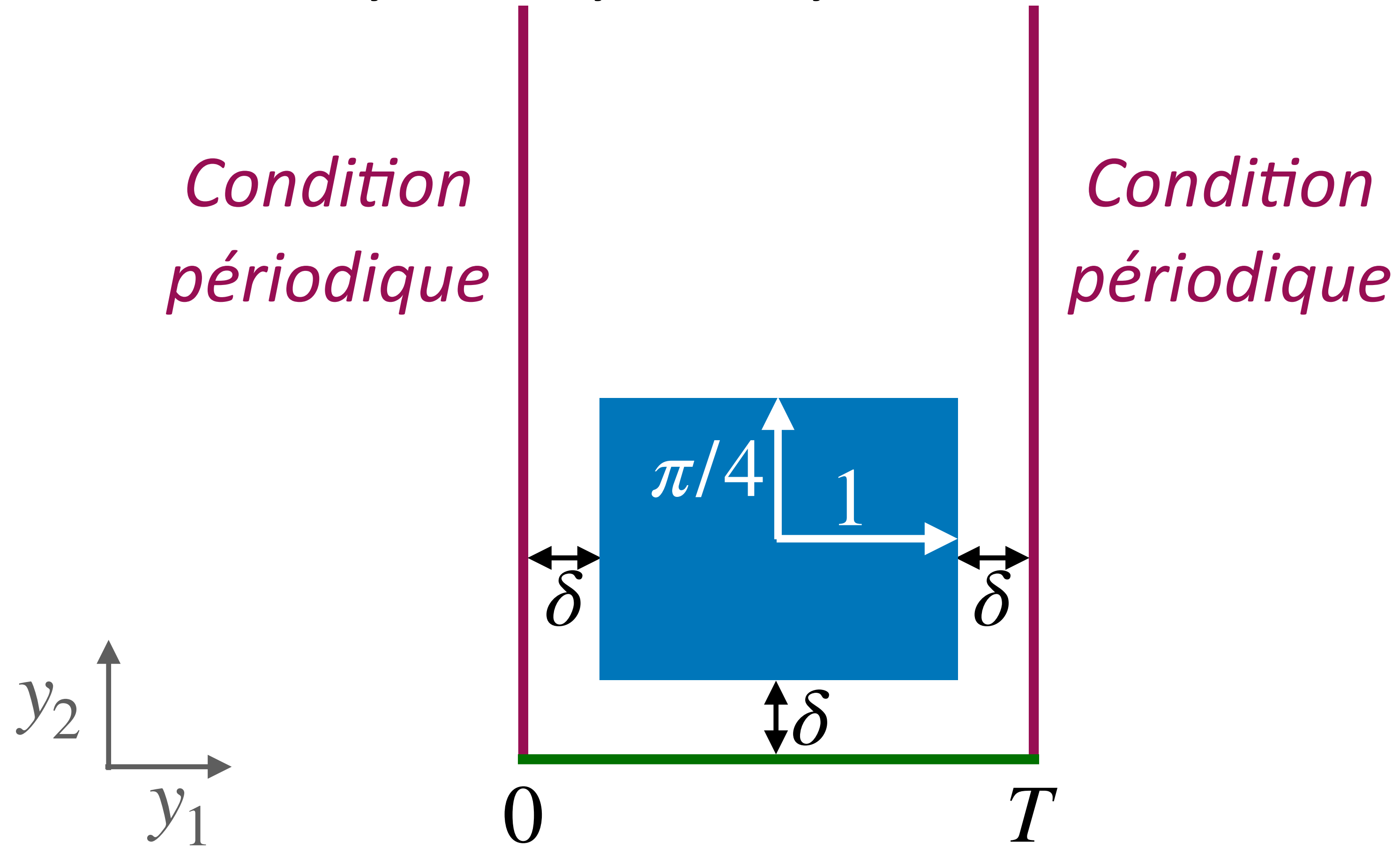


Influence de la fréquence sur le coefficient de réflexion pour différents δ

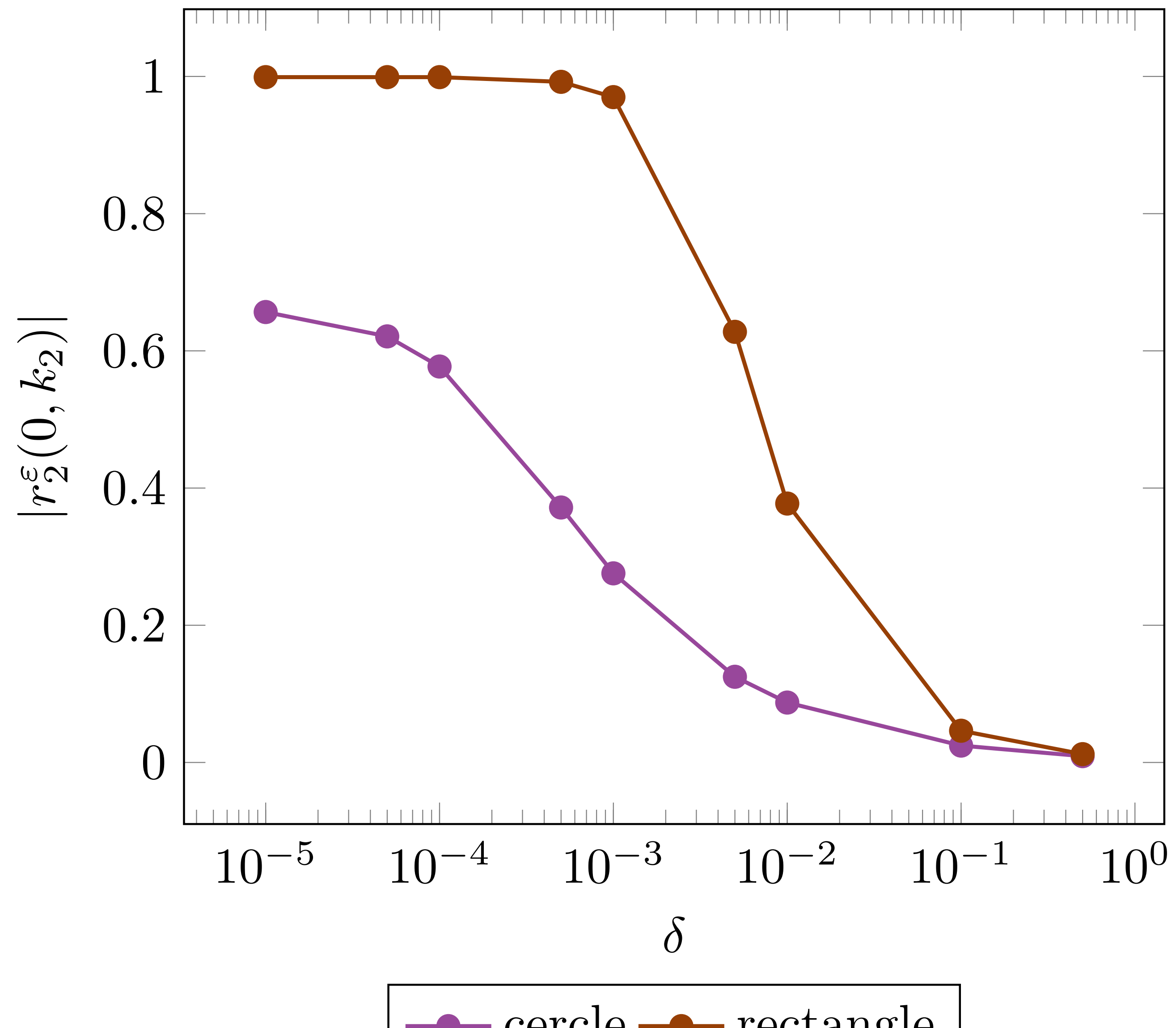


Impact de la forme

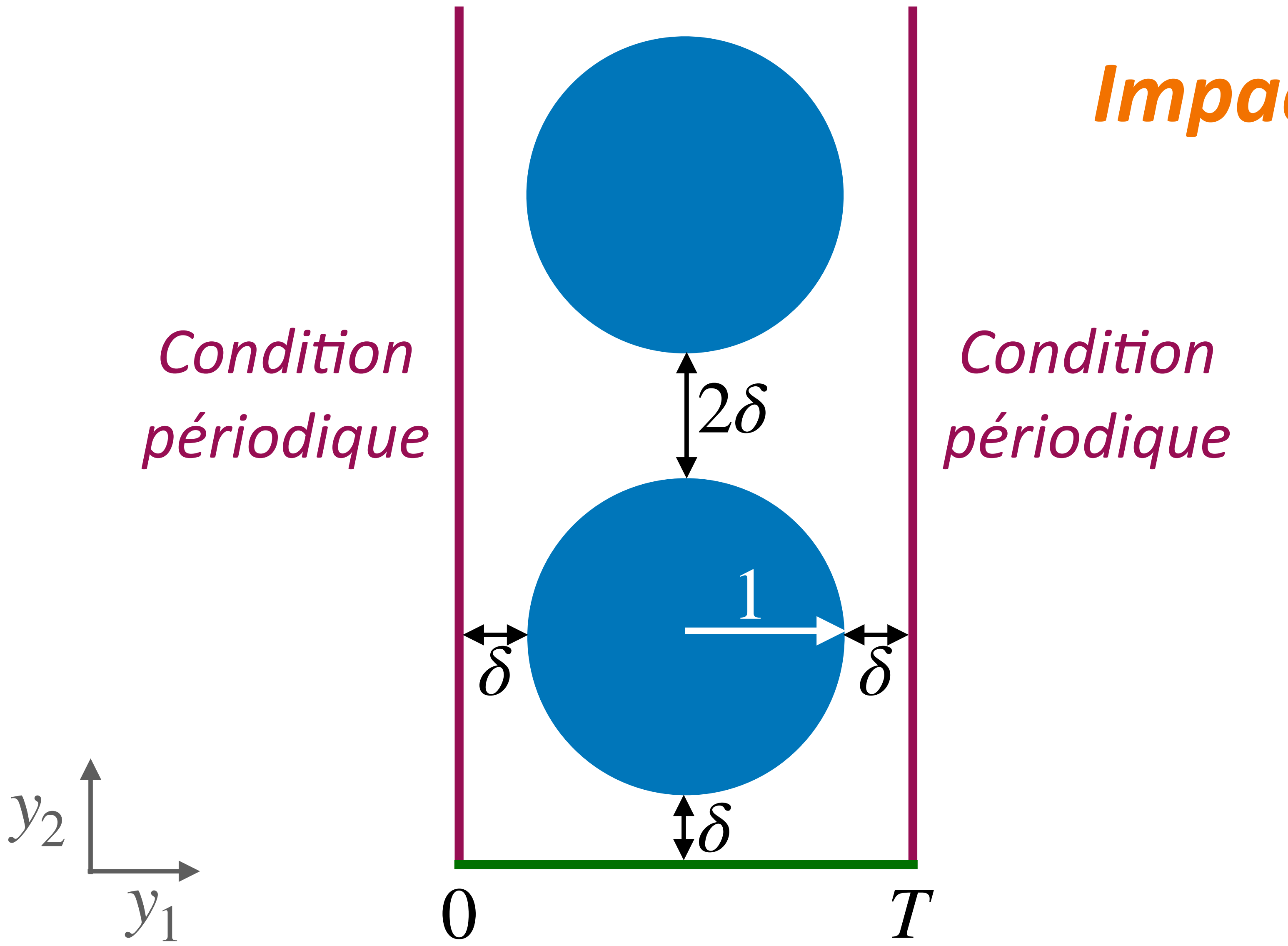
Paramètres : $\varepsilon = 10^{-4}\text{m}$ **,** $Z = 1$**,** $\theta = 0$**,** $\lambda = 15\text{cm}$



Influence de δ ***sur le coefficient de réflexion pour différentes formes***

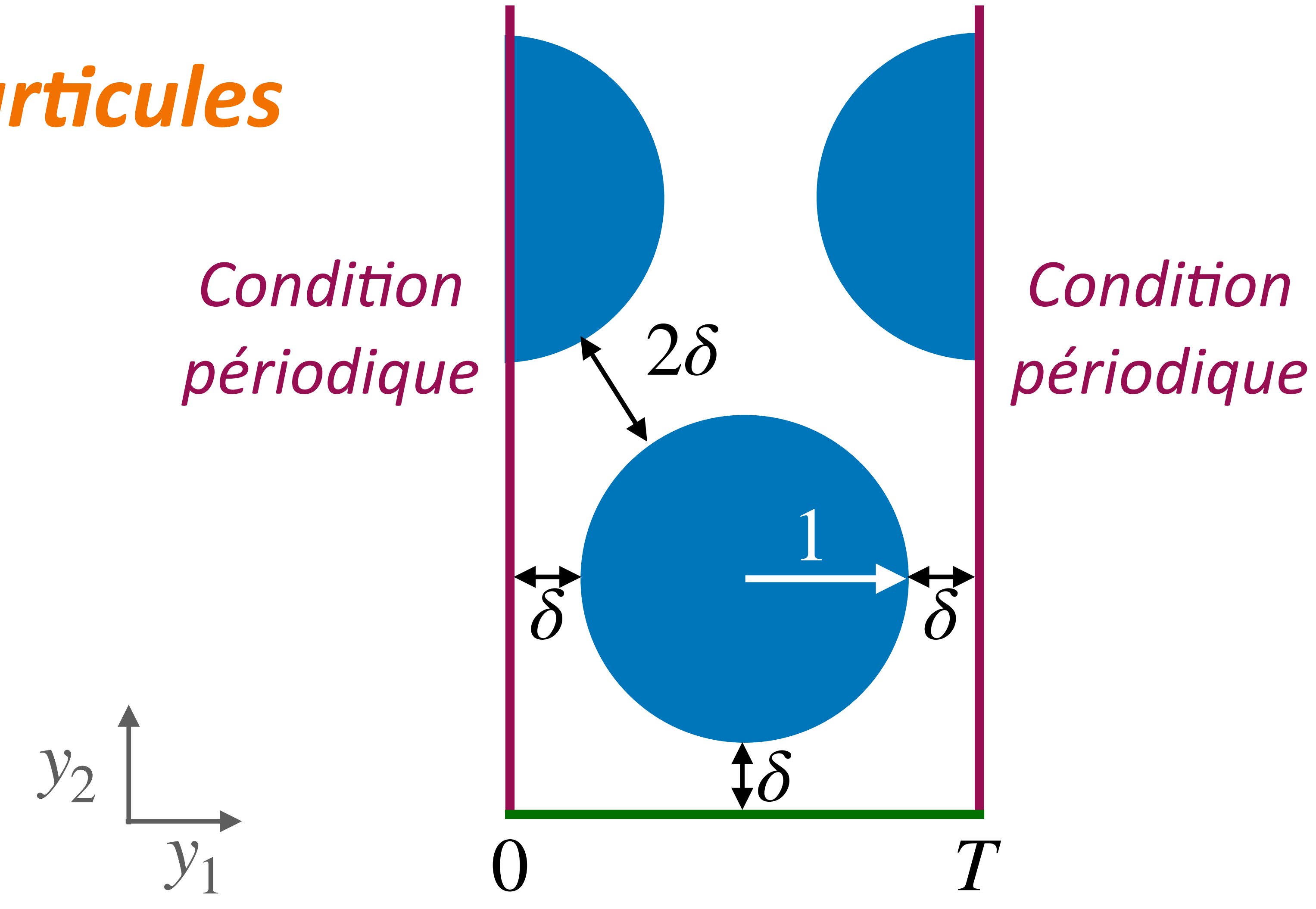


Evolution du coefficient de réflexion (3)

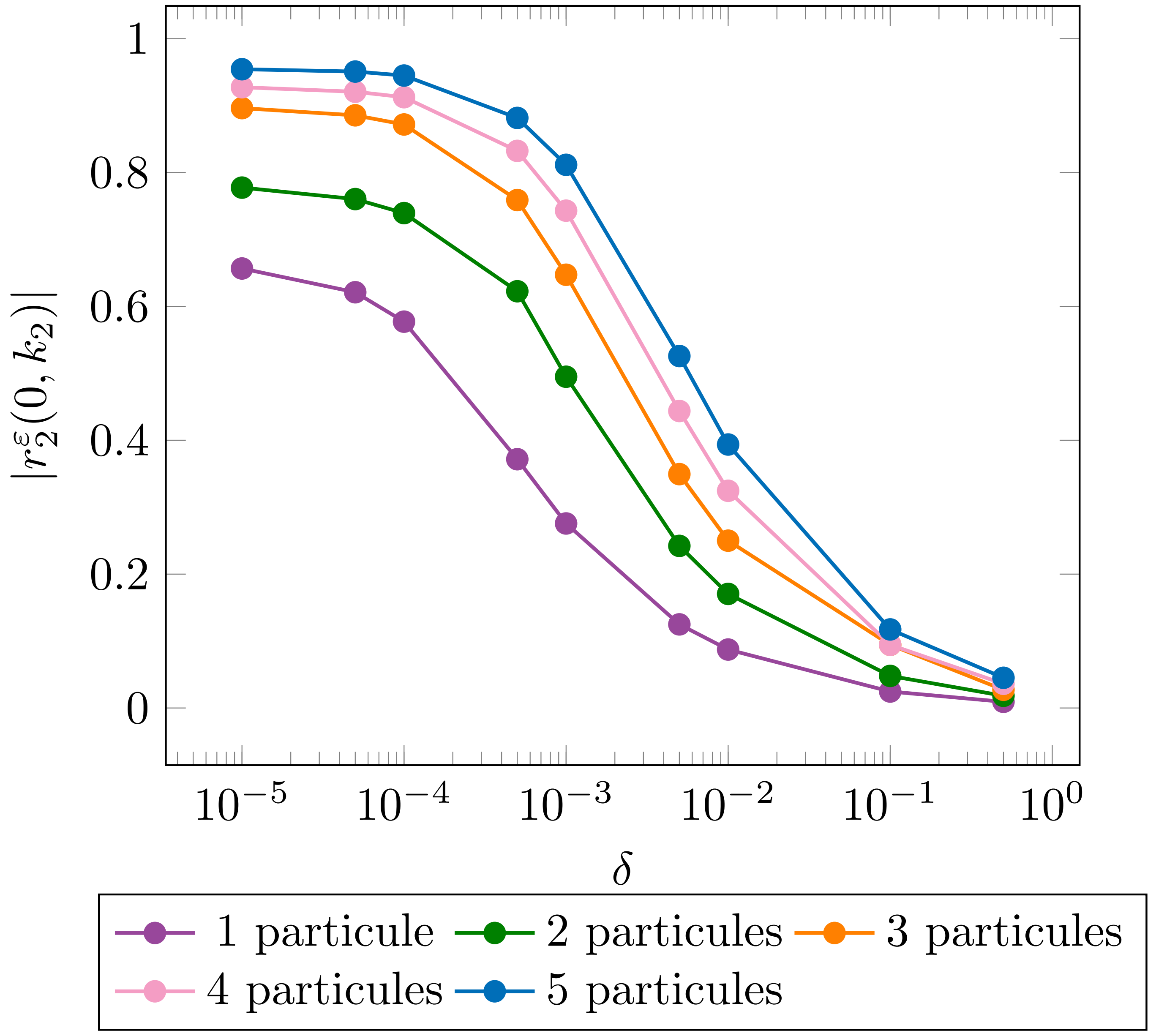


Impact de l'épaisseur et de la disposition des particules

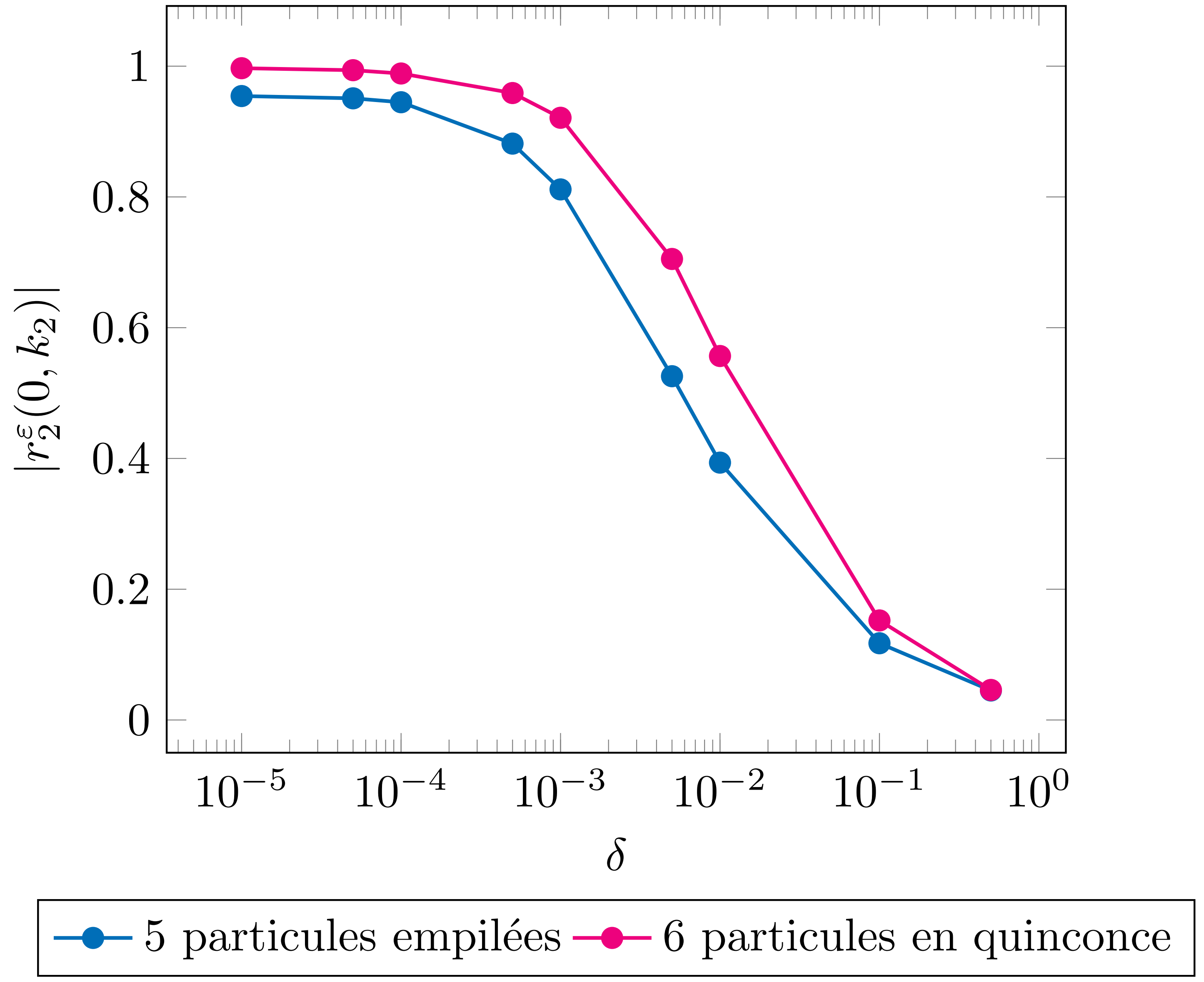
Paramètres : $\varepsilon = 10^{-4}\mathrm{m}$, $Z = 1$, $\theta = 0$, $\lambda = 15\mathrm{cm}$



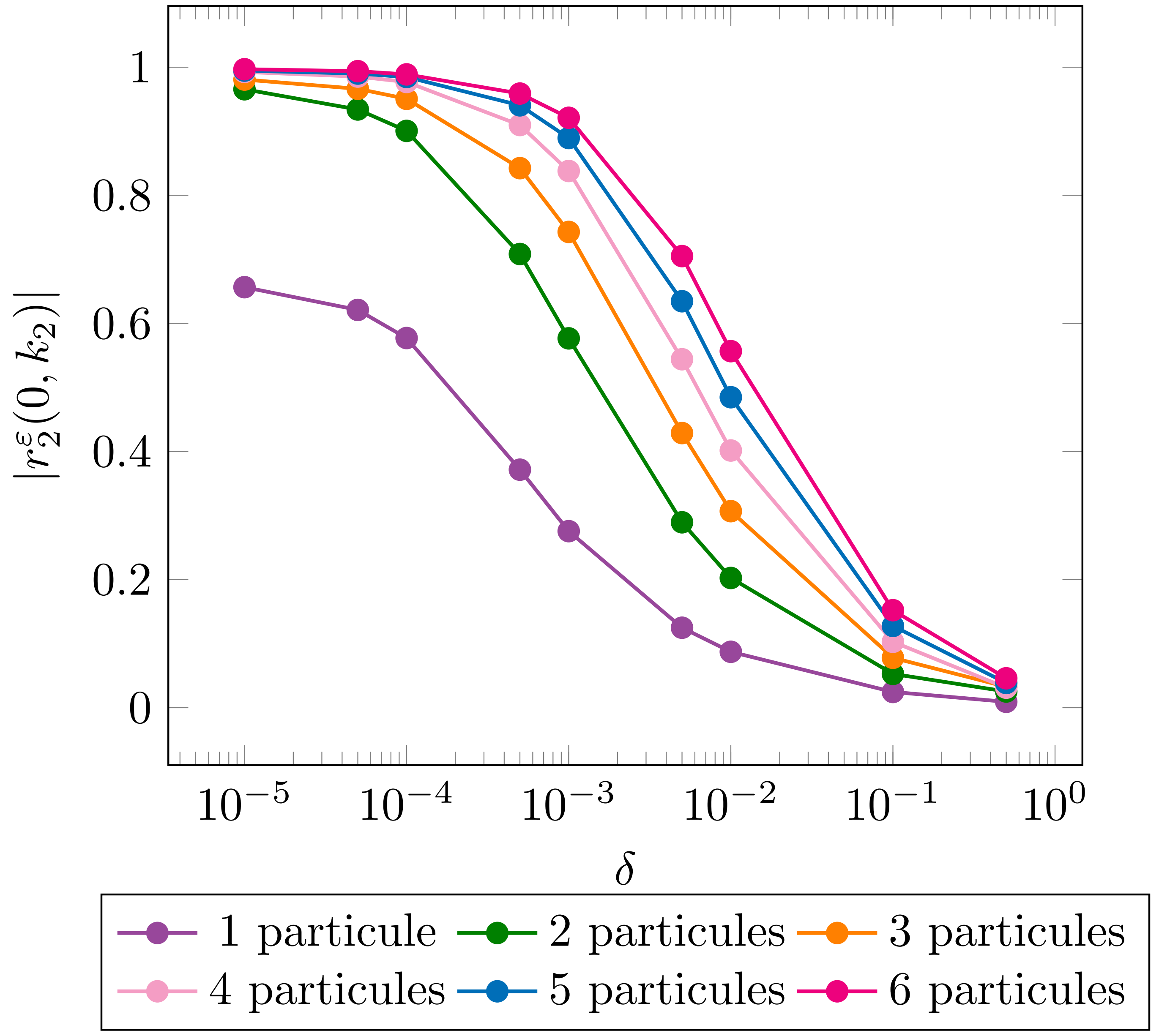
Influence du plusieurs couches empilées sur le coefficient de réflexion en fonction de δ



Comparaison entre particules empilées et particules en quinconce pour une hauteur de couche équivalente



Influence de plusieurs couches en quinconce sur le coefficient de réflexion en fonction de δ

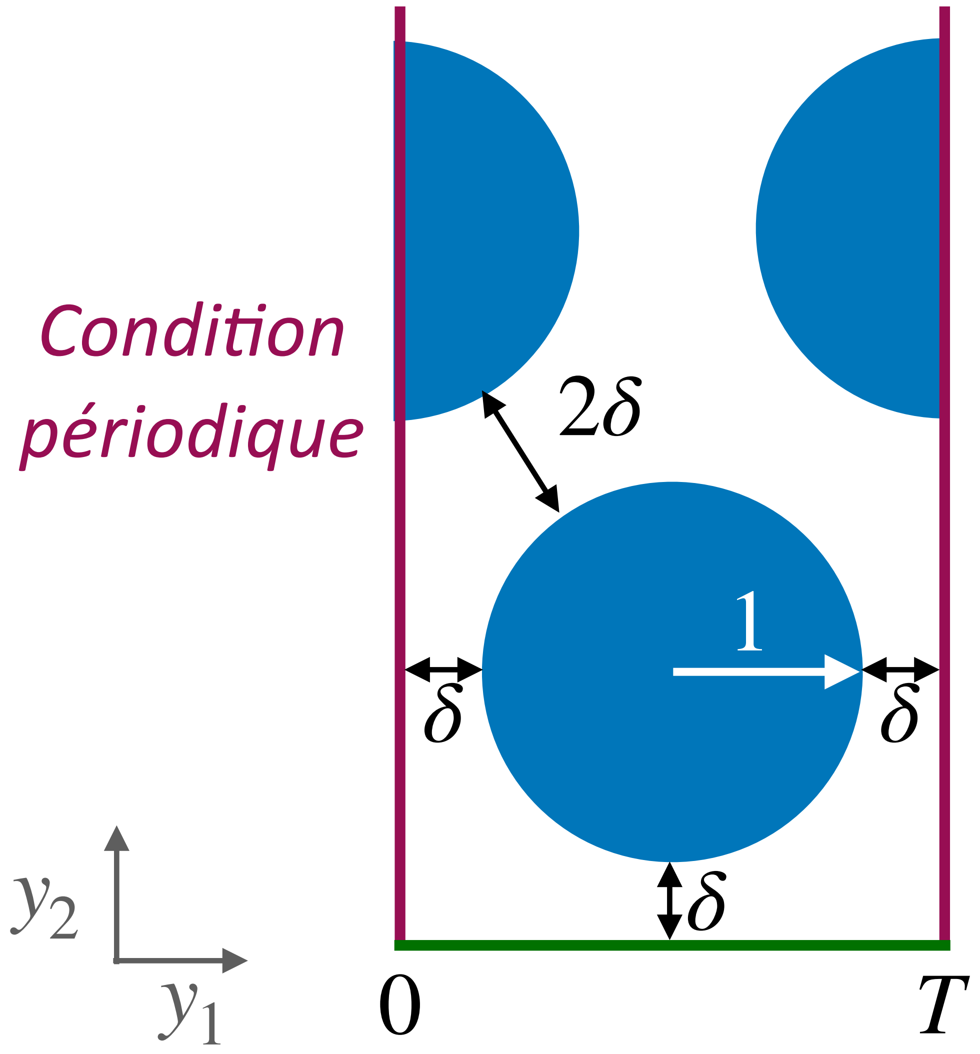


Evolution du coefficient de réflexion (4)

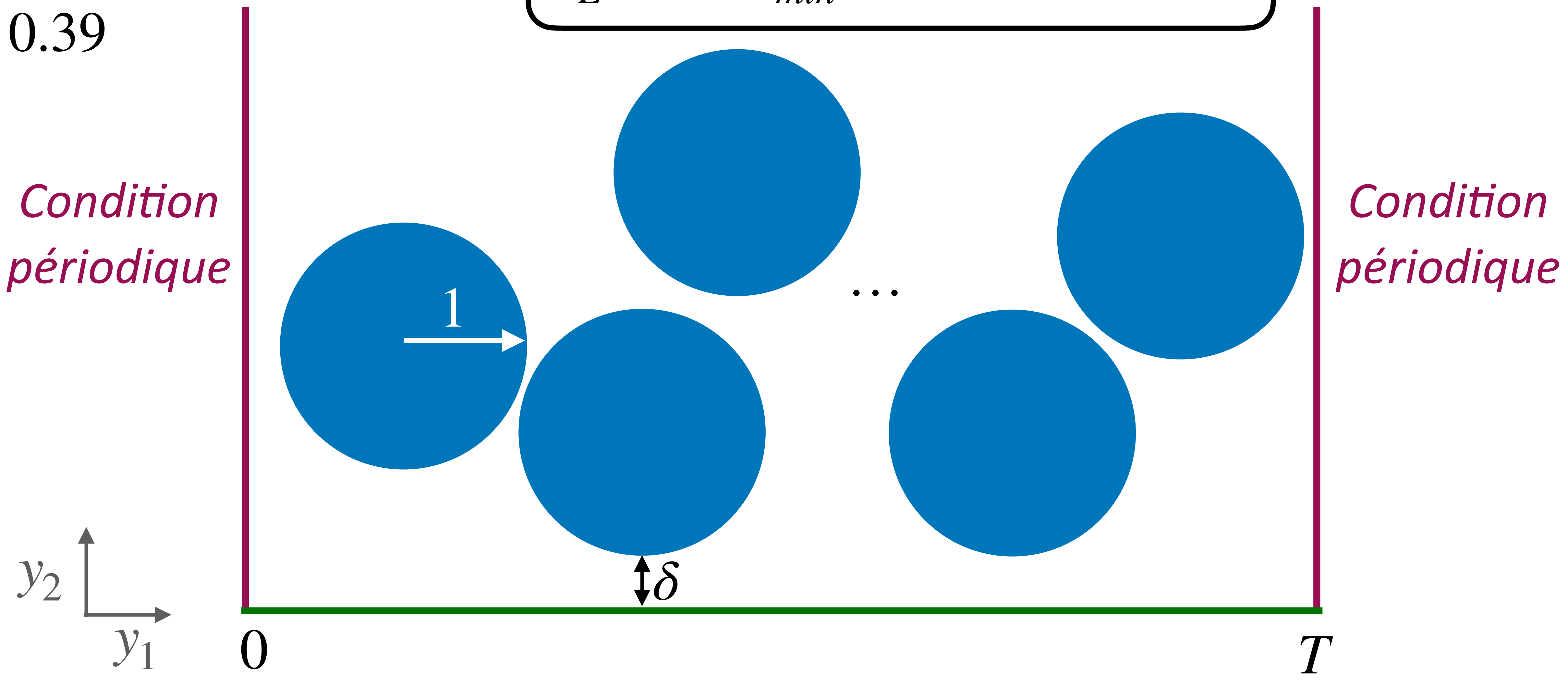
Comparaison entre une répartition périodique et aléatoire

Paramètres : $\varepsilon = 10^{-4}\mathrm{m}$, $Z = 1, \theta = 0, \rho = 0.39$

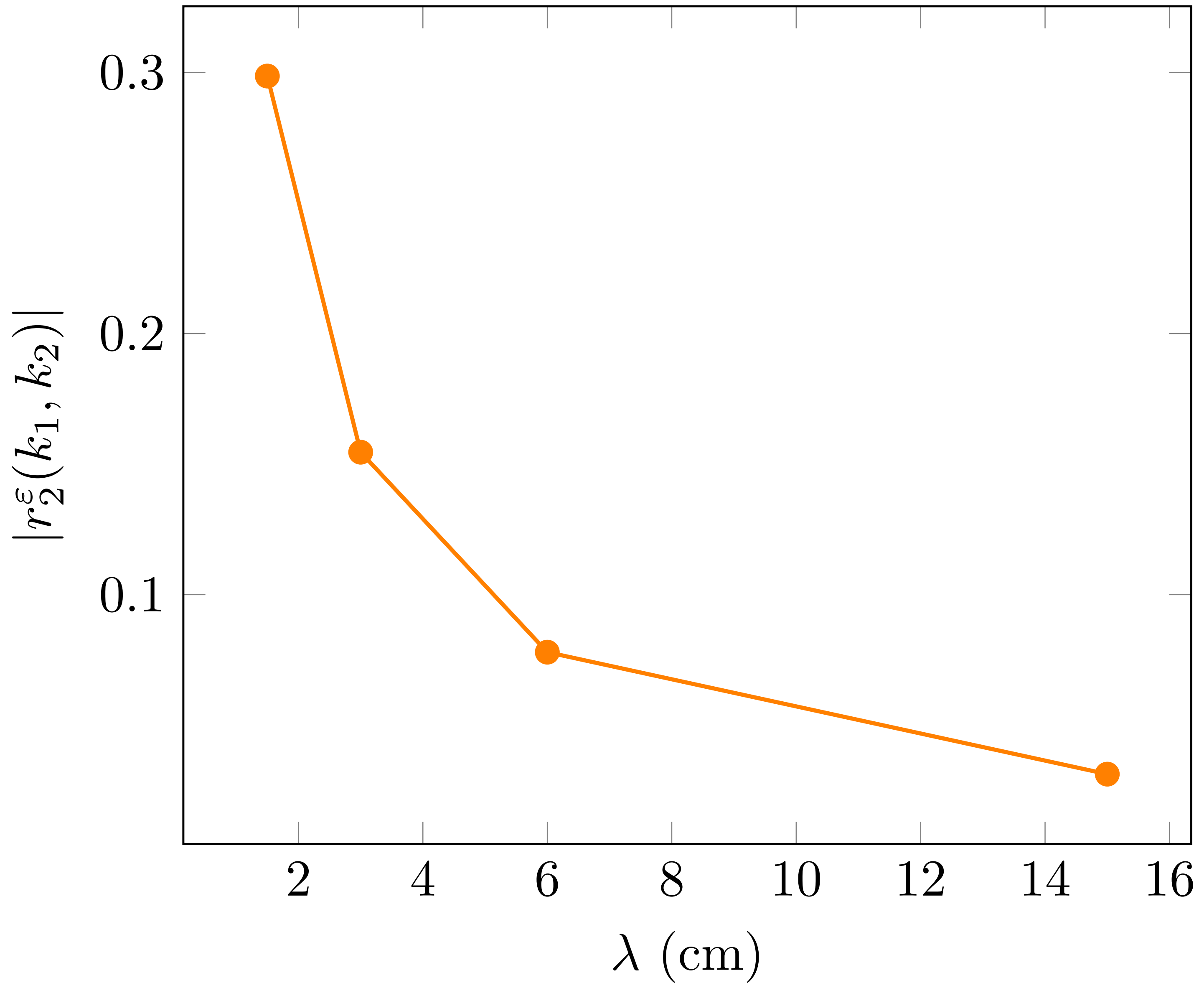
$h_L = 10, \delta_{min} = 10^{-6}, T = 3000$



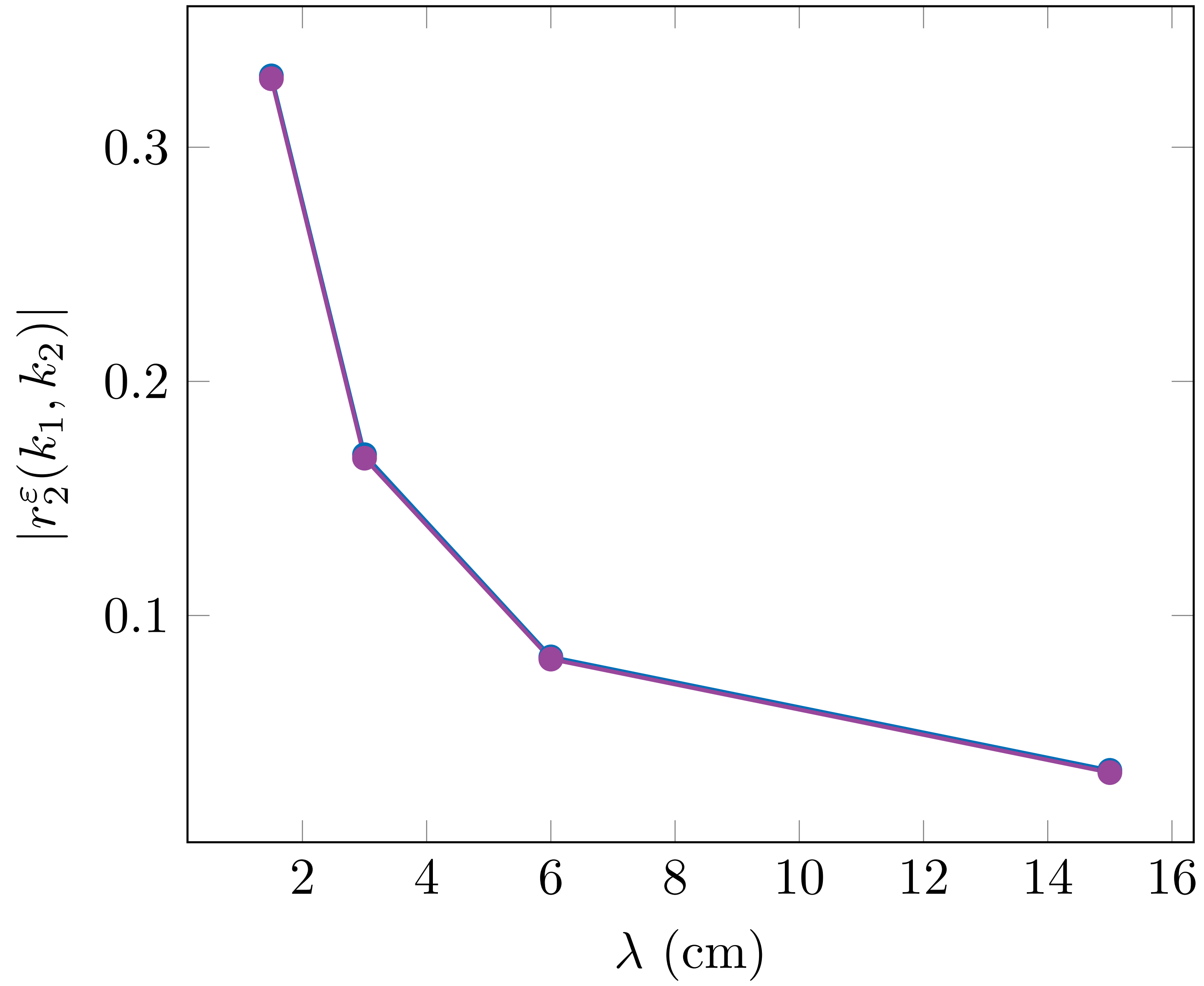
$\delta = 0.5$
4 couches



Evolution du coefficient de réflexion en fonction de λ pour une répartition en quinconce



Evolution du coefficient de réflexion en fonction de λ pour une répartition stationnaire ergodique

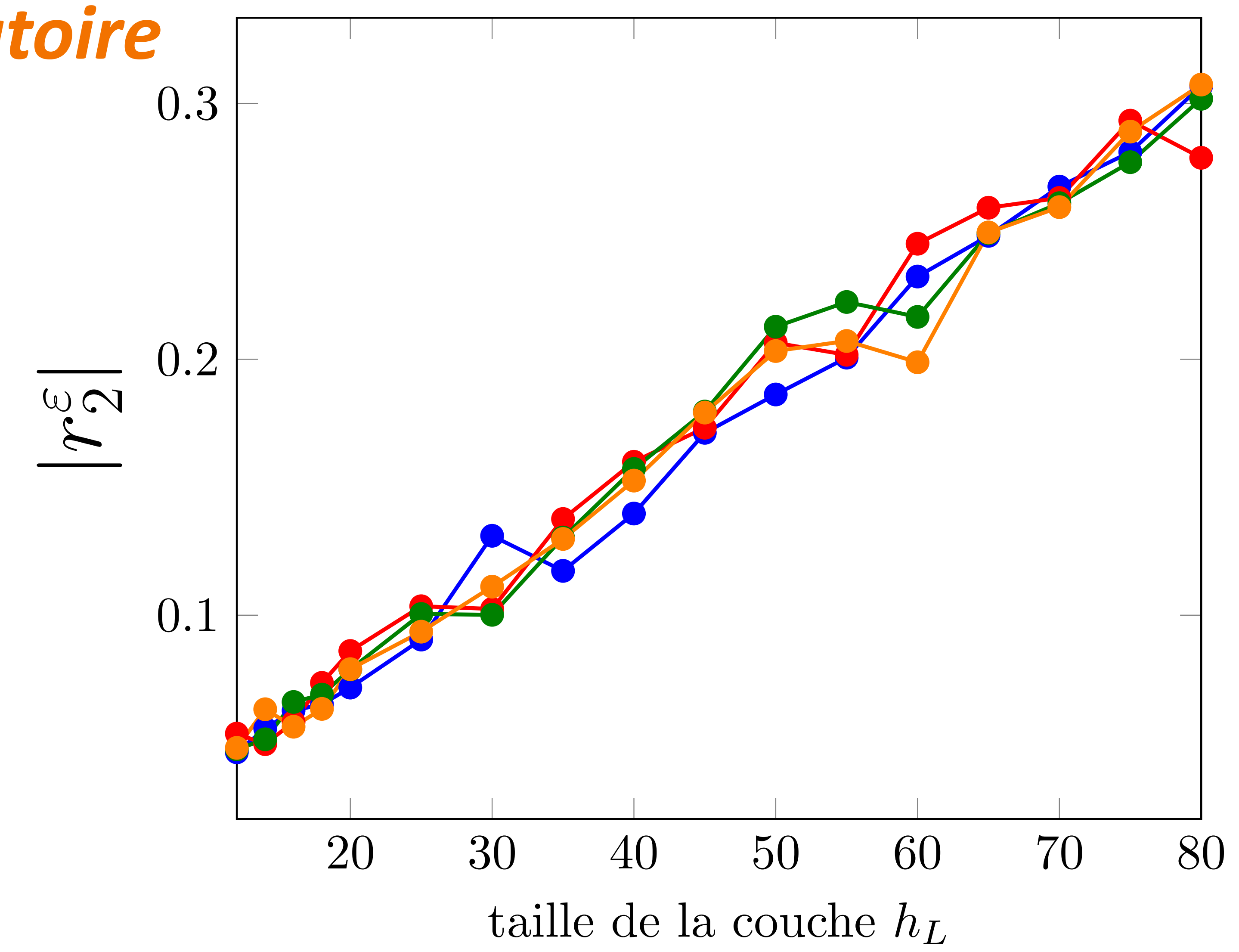


Evolution du coefficient de réflexion (5)

Impact de la taille de la couche pour une répartition aléatoire

Paramètres : $\varepsilon = 10^{-4}\mathrm{m}$, $Z = 1$, $\theta = 0$, $\lambda = 15\mathrm{cm}$

$$\boxed{\delta_{min} = 10^{-6}, T = 3000, \rho = 0.4}$$



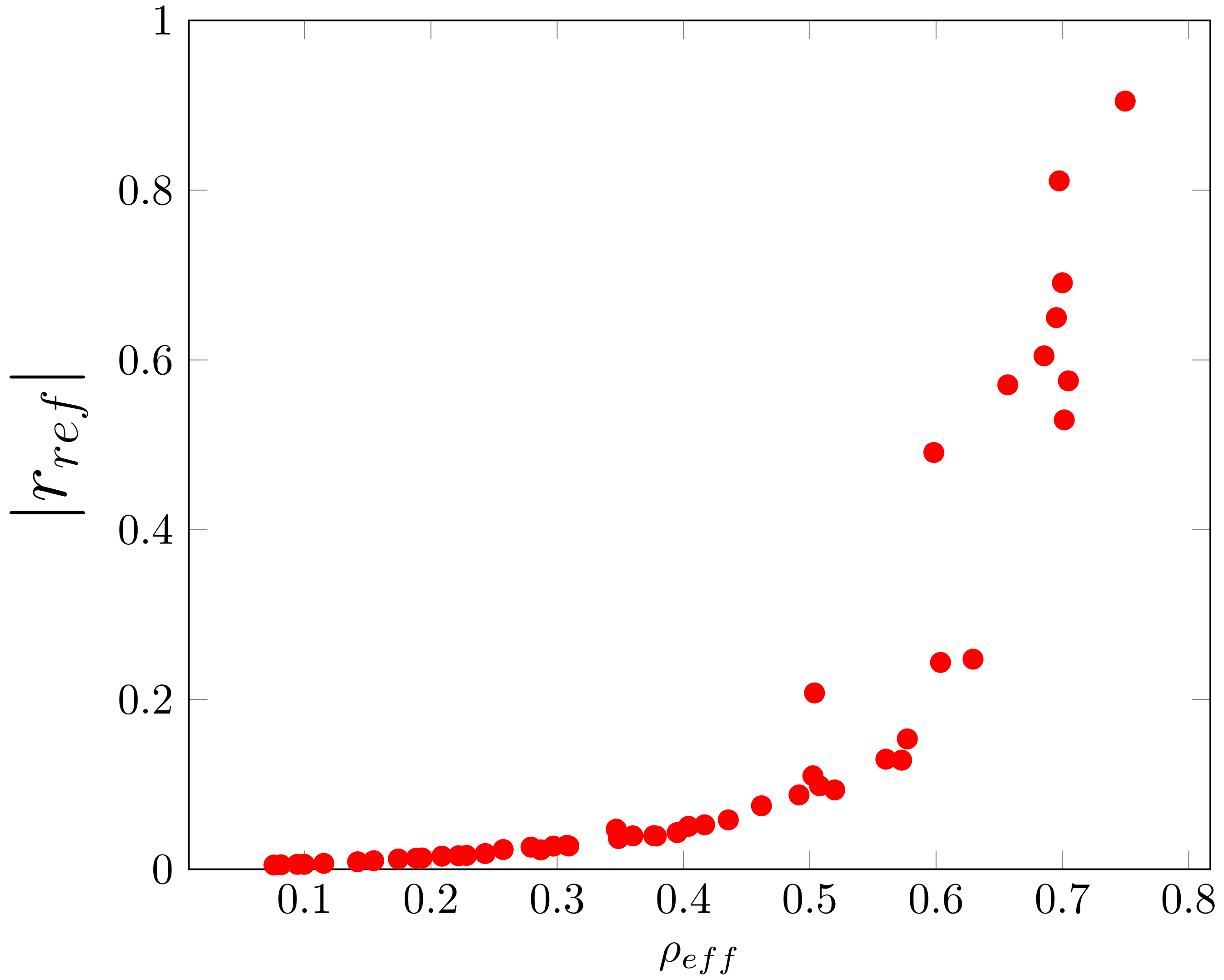
La transition entre un coefficient $|r| = 0$ et $|r| = 1$ est observée pour de très grosses couches !

On supprime la contrainte de distance minimale entre les particules. Des amas peuvent apparaître !

Evolution du coefficient de réflexion pour la solution de référence en fonction de ρ

Paramètres : $Z = 1$, $\theta = 0$, $\lambda = 15\mathrm{cm}$, $\varepsilon = 10^{-4}\mathrm{m}$, $T = 100\varepsilon\mathrm{m}$, $h_L = 10\varepsilon\mathrm{m}$

$$\rho = \frac{\text{Aire de l'amas}}{\text{Aire de la couche}}$$



Exemple d'un amas :

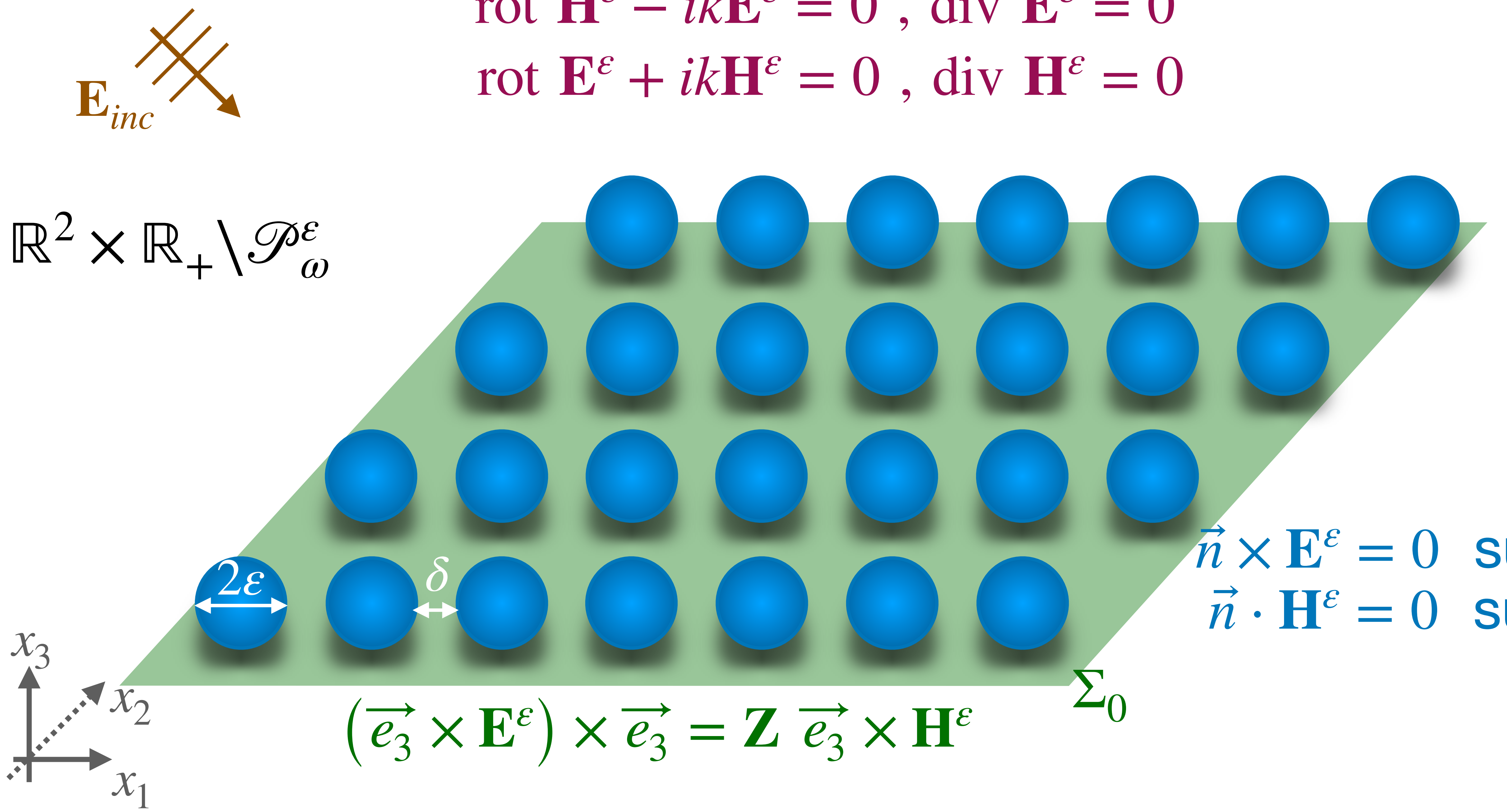
Attention : pour que le modèle soit applicable, il faut que la taille des amas soit $\ll \lambda$

Etude du cas Maxwell dans le cas périodique

$\mathbf{E}^{\varepsilon} - \mathbf{E}_{inc}$ est sortant
$\mathbf{H}^{\varepsilon} - \mathbf{H}_{inc}$ est sortant

$\mathrm{rot}\ \mathbf{H}^{\varepsilon} - ik\mathbf{E}^{\varepsilon} = 0\ ,\ \mathrm{div}\ \mathbf{E}^{\varepsilon} = 0$
$\mathrm{rot}\ \mathbf{E}^{\varepsilon} + ik\mathbf{H}^{\varepsilon} = 0\ ,\ \mathrm{div}\ \mathbf{H}^{\varepsilon} = 0$

$\mathscr{D}_{\omega}^{\varepsilon} := \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \backslash \mathscr{P}_{\omega}^{\varepsilon}$

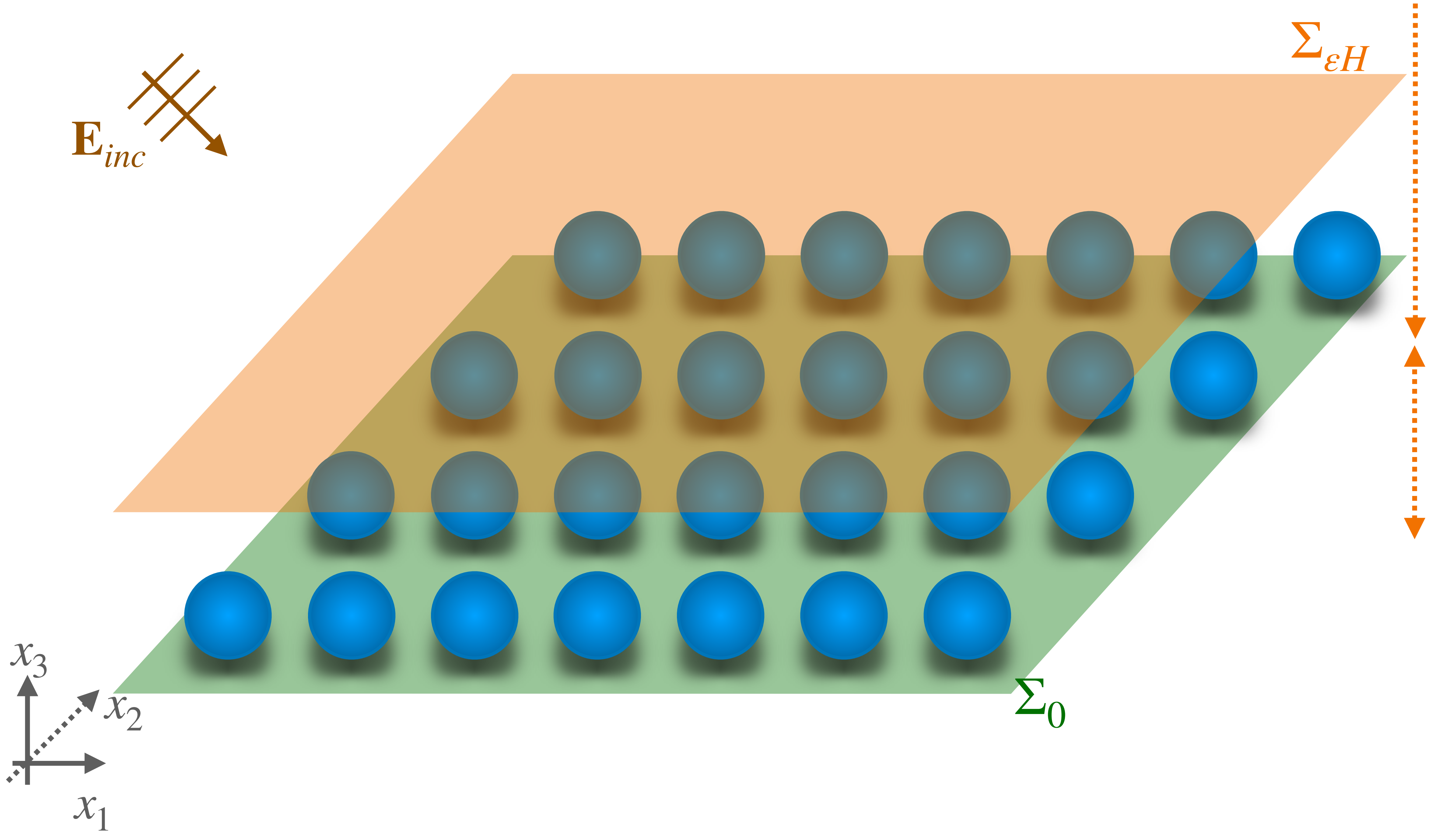


$\vec{n} \times \mathbf{E}^{\varepsilon} = 0$ sur $\partial\mathscr{P}^{\varepsilon}$
$\vec{n} \cdot \mathbf{H}^{\varepsilon} = 0$ sur $\partial\mathscr{P}^{\varepsilon}$

$\left(\vec{e_3} \times \mathbf{E}^{\varepsilon}\right) \times \vec{e_3} = \mathbf{Z}\ \vec{e_3} \times \mathbf{H}^{\varepsilon}$

- *Développement asymptotique*
- *Problèmes de champ proche*
- *Modèle effectif proposé*

Développement asymptotique



Pour $x_3 > \varepsilon H$ Termes de champ lointain

$$\left| \begin{aligned} \mathbf{E}^\varepsilon(\mathbf{x}) &= \sum_{m\in\mathbb{N}} \varepsilon^m \, \mathbf{e}_m(\mathbf{x}) + \sum_{m\in\mathbb{N}} \varepsilon^m \, \mathbf{E}_m\left(x_1, x_2; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}, \frac{x_3}{\varepsilon}\right) \\ \mathbf{H}^\varepsilon(\mathbf{x}) &= \sum_{m\in\mathbb{N}} \varepsilon^m \, \mathbf{h}_m(\mathbf{x}) + \sum_{m\in\mathbb{N}} \varepsilon^m \, \mathbf{H}_m\left(x_1, x_2; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}, \frac{x_3}{\varepsilon}\right) \end{aligned} \right.$$

Pour $x_3 < \varepsilon H$

$$\left| \begin{aligned} \mathbf{E}^\varepsilon(\mathbf{x}) &= \sum_{m\in\mathbb{N}} \varepsilon^m \, \mathbf{E}_m\left(x_1, x_2; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}, \frac{x_3}{\varepsilon}\right) \\ \mathbf{H}^\varepsilon(\mathbf{x}) &= \sum_{m\in\mathbb{N}} \varepsilon^m \, \mathbf{H}_m\left(x_1, x_2; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}, \frac{x_3}{\varepsilon}\right) \end{aligned} \right.$$

Termes de champ proche

- *Le développement asymptotique dépend du paramètre H*
- $\mathbf{E}_m$, $\mathbf{H}_m$ *dépendent des variables macro $\mathbf{x}_T = (x_1, x_2)$ mais aussi des variables dilatées $\mathbf{y} = \dfrac{\mathbf{x}}{\varepsilon}$*
- $\mathbf{e}_m$, $\mathbf{h}_m$ *ne dépendent que des variables macro $\mathbf{x}$ et ne vivent qu'au dessus des particules.*
- *Nous faisons les hypothèses :*

$\forall m \geq 0$

✳ $\mathbf{E}_m$, $\mathbf{H}_m$ *sont T_1-**périodiques** par rapport à y_1 et T_2-**périodiques** par rapport à y_2 ;*

✳ $\mathbf{E}_m(\mathbf{x}_T; \mathbf{y}_T, y_3) \underset{y_3\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\mathbf{H}_m(\mathbf{x}_T; \mathbf{y}_T, y_3) \underset{y_3\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Cascade d'équations

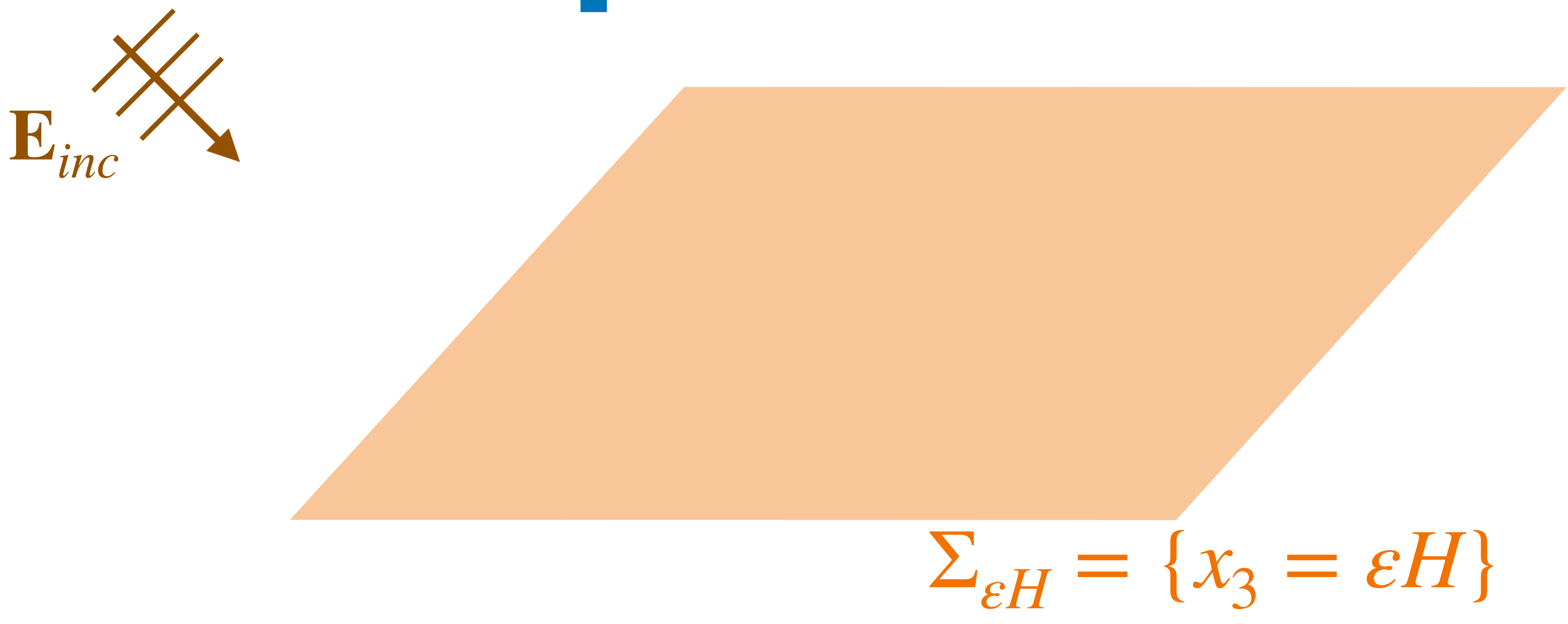
Termes de champ lointain

$\forall m \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{e}_m - k^2 \mathbf{e}_m = 0 \ \text{ dans } \ \mathbb{R}^2 \times (\varepsilon H, +\infty)$$

$$\mathrm{div}\ \mathbf{e}_m = 0 \ \text{ dans } \ \mathbb{R}^2 \times (\varepsilon H, +\infty)$$

Il manque des conditions sur $\Sigma_{\varepsilon H}$



$\mathbf{e}_0 - \mathbf{E}_{inc}$ est sortant

$\mathbf{e}_m$ est sortant

Idem pour $\mathbf{h}_m$

Termes de champ proche

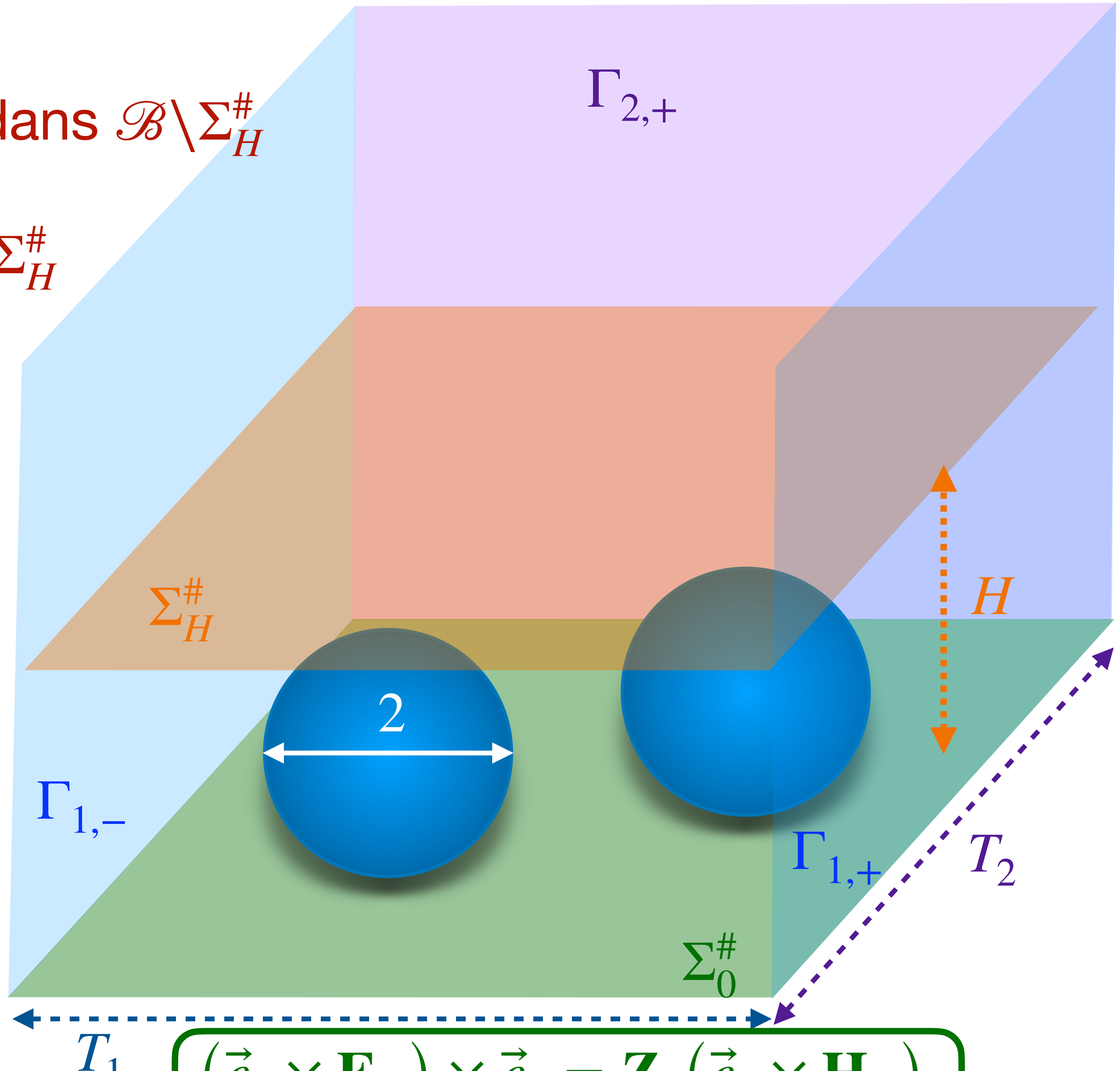
$$\mathrm{rot}_{\mathbf{y}}\ \mathbf{E}_m = -\,\mathrm{rot}_T\ \mathbf{E}_{m-1} - ik\mathbf{H}_{m-1} \ \text{ dans } \mathscr{B} \backslash \Sigma_H^\#$$

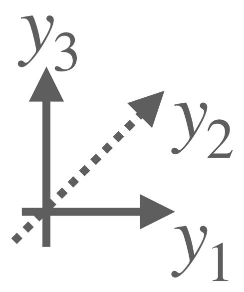
$$\mathrm{div}_{\mathbf{y}}\ \mathbf{E}_m = -\,\mathrm{div}_T\ \mathbf{E}_{m-1} \ \text{ dans } \mathscr{B} \backslash \Sigma_H^\#$$

$$\left[\vec{e}_3 \times \mathbf{E}_m\right]_H = -\,\vec{e}_3 \times \mathbf{e}_m\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}$$

$$\left[\vec{e}_3 \cdot \mathbf{E}_m\right]_H = -\,\vec{e}_3 \cdot \mathbf{e}_m\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}$$

$$\vec{n} \times \mathbf{E}_m = 0 \ \text{ sur } \partial\mathscr{P}_\#$$





$$\mathrm{rot}_{\mathbf{y}}\ \mathbf{H}_m = -\,\mathrm{rot}_T\ \mathbf{H}_{m-1} + ik\mathbf{E}_{m-1} \ \text{ dans } \mathscr{B} \backslash \Sigma_H^\#$$

$$\mathrm{div}_{\mathbf{y}}\ \mathbf{H}_m = -\,\mathrm{div}_T\ \mathbf{H}_{m-1} \ \text{ dans } \mathscr{B} \backslash \Sigma_H^\#$$

$$\left[\vec{e}_3 \times \mathbf{H}_m\right]_H = -\,\vec{e}_3 \times \mathbf{h}_m\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}$$

$$\left[\vec{e}_3 \cdot \mathbf{H}_m\right]_H = -\,\vec{e}_3 \cdot \mathbf{h}_m\Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}$$

$$\vec{n} \cdot \mathbf{H}_m = 0 \ \text{ sur } \partial\mathscr{P}_\#$$

$$\boxed{\left(\vec{e}_3 \times \mathbf{E}_m\right) \times \vec{e}_3 = \mathbf{Z}\ \left(\vec{e}_3 \times \mathbf{H}_m\right)}$$

$$\mathscr{B} := (0,T_1) \times (0,T_2) \times \mathbb{R}_+ \backslash \overline{\mathscr{P}_\#}$$

Caractère bien posé

$$\mathrm{rot}_{\mathbf{y}}\,\mathbf{E}_C = \mathbf{F}^E \text{ dans } \mathscr{B} \qquad \mathrm{rot}_{\mathbf{y}}\,\mathbf{H}_C = \mathbf{F}^H \text{ dans } \mathscr{B}$$
$$\mathrm{div}_{\mathbf{y}}\,\mathbf{E}_C = G^E \text{ dans } \mathscr{B} \qquad \mathrm{div}_{\mathbf{y}}\,\mathbf{H}_C = G^H \text{ dans } \mathscr{B}$$
$$\left(\mathbf{E}_C, \mathbf{H}_C\right) \text{ est } (T_1, T_2) - \text{périodique}$$
$$\vec{n} \times \mathbf{E}_C = 0 \text{ sur } \partial\mathscr{P}_\# \qquad \vec{n} \cdot \mathbf{H}_C = 0 \text{ sur } \partial\mathscr{P}_\#$$
$$\left(\vec{e}_3 \times \mathbf{E}_C\right) \times \vec{e}_3 = \mathbf{Z}\,\left(\vec{e}_3 \times \mathbf{H}_C\right) \text{ sur } \Sigma_0^\#$$

Dans un cadre variationnel classique W, ce problème n'est pas bien posé! L'opérateur associé a un noyau de dimension finie :

Supposons que $\mathscr{P}_\#$ est composé de N particules alors le ***noyau de l'opérateur*** *$\mathscr{N}$ est un espace de dimension $N+4$ donné par*

$$\mathscr{N} := \Big\{ (\mathbf{E}, \mathbf{H}) = \Big(c_1\big(\nabla p_1, -\frac{1}{Z^{(1)}}\nabla q_2\big) + c_2\big(\nabla p_2, \frac{1}{Z^{(2)}}\nabla q_1\big) + c_3\big(\nabla p_3, 0\big) + d_3\big(0, \nabla q_3\big) + \sum_{J=1}^{N} \alpha_J\big(\nabla r_J, 0\big)\Big), \quad (c_1, c_2, c_3, d_3) \in \mathbb{C}^4,\ \alpha_J \in \mathbb{C} \Big\}$$

$\forall i \in \{1,2,3\}$,

$p_i \in H^1_{loc}(\mathscr{B})$ t.q. $\lim_{y_3 \to +\infty} \nabla p_i = \vec{e}_i$ et

$\widetilde{p}_i = p_i - y_i$ est $(T1,T2)$ – périodique

$$\left|\begin{array}{l} \Delta \widetilde{p}_i = 0 \text{ dans } \mathscr{B} \\ \widetilde{p}_i = -y_i \text{ sur } \partial\mathscr{P}_\# \\ \widetilde{p}_i = 0 \text{ sur } \Sigma_0^\# \end{array}\right.$$

$q_i \in H^1_{loc}(\mathscr{B})$ t.q. $\lim_{y_3 \to +\infty} \nabla q_i = \vec{e}_i$ et

$\widetilde{q}_i = q_i - y_i$ est $(T1,T2)$ – périodique

$$\left|\begin{array}{l} \Delta \widetilde{q}_i = 0 \text{ dans } \mathscr{B} \\ \nabla\widetilde{q}_i \cdot \vec{n} = -\vec{e}_i \cdot \vec{n} \text{ sur } \partial\mathscr{P}_\# \\ \widetilde{q}_i = 0 \text{ sur } \Sigma_0^\# \end{array}\right.$$

Soit $\mathscr{P}_\# = \cup_{J=1}^N B_J$, $\forall 1 \le J \le N$, $\lim_{y_3 \to +\infty} \nabla r_J = 0$

r_J est $(T1,T2)$ – périodique

$$\left|\begin{array}{l} \Delta r_J = 0 \text{ dans } \mathscr{B} \\ r_J = 1 \text{ sur } \partial B_J \\ r_J = 0 \text{ sur } \Sigma_0^\# \cup \left(\partial\mathscr{P}_\# \backslash \partial B_J\right) \end{array}\right.$$

Caractère bien posé

$$\mathrm{rot}_{\mathbf{y}}\, \mathbf{E}_C = \mathbf{F}^E \text{ dans } \mathscr{B} \qquad \mathrm{rot}_{\mathbf{y}}\, \mathbf{H}_C = \mathbf{F}^H \text{ dans } \mathscr{B}$$

$$\mathrm{div}_{\mathbf{y}}\, \mathbf{E}_C = G^E \text{ dans } \mathscr{B} \qquad \mathrm{div}_{\mathbf{y}}\, \mathbf{H}_C = G^H \text{ dans } \mathscr{B}$$

$$\left(\mathbf{E}_C, \mathbf{H}_C\right) \text{ est } (T_1, T_2) - \text{périodique}$$

$$\vec{n} \times \mathbf{E}_C = 0 \text{ sur } \partial\mathscr{P}_\# \qquad \vec{n} \cdot \mathbf{H}_C = 0 \text{ sur } \partial\mathscr{P}_\#$$

$$\left(\vec{e}_3 \times \mathbf{E}_C\right) \times \vec{e}_3 = \mathbf{Z}\ \left(\vec{e}_3 \times \mathbf{H}_C\right) \text{ sur } \Sigma_0^\#$$

Dans un cadre variationnel classique W, ce problème n'est pas bien posé! L'opérateur associé a un noyau de dimension finie :

Supposons que $\mathscr{P}_\#$ est composé de N particules alors le ***noyau de l'opérateur*** $\mathscr{N}$ *est un espace de dimension $N+4$ donné par*

$$\mathscr{N} := \left\{ \left(\mathbf{E}, \mathbf{H}\right) = \left(c_1\left(\nabla p_1, -\frac{1}{Z^{(1)}}\nabla q_2\right) + c_2\left(\nabla p_2, \frac{1}{Z^{(2)}}\nabla q_1\right) + c_3\left(\nabla p_3, 0\right) + d_3\left(0, \nabla q_3\right) + \sum_{J=1}^{N} \alpha_J\left(\nabla r_J, 0\right)\right), \right.$$
$$\left. (c_1, c_2, c_3, d_3) \in \mathbb{C}^4,\ \alpha_J \in \mathbb{C} \right\}$$

Le problème admet un unique couple $\left(\mathbf{E}_C, \mathbf{H}_C\right)$ solution dans $W \cap \mathscr{N}^\perp$ *(Delourme 2010)*

Comportement à l'infini

- *On cherche à caractériser le comportement à l'infini de* $\left(\mathbf{E}_C, \mathbf{H}_C\right)$

On note $\mathbf{C}_E = \lim\limits_{y_3 \to +\infty} \mathbf{E}_C$ *et* $\mathbf{C}_H = \lim\limits_{y_3 \to +\infty} \mathbf{H}_C$

$$\begin{pmatrix} C_E^{(1)} + Z^{(1)} C_H^{(2)} \\ C_E^{(2)} - Z^{(2)} C_H^{(1)} \end{pmatrix} = \frac{1}{T_1 T_2} \begin{pmatrix} \displaystyle\int_{\mathscr{B}} \mathbf{F}^E \cdot \nabla q_2 \, \mathbf{dy} \; - \; Z^{(1)} \int_{\mathscr{B}} \mathbf{F}^H \cdot \nabla p_1 \, \mathbf{dy} \\ \displaystyle -\int_{\mathscr{B}} \mathbf{F}^E \cdot \nabla q_1 \, \mathbf{dy} \; - \; Z^{(2)} \int_{\mathscr{B}} \mathbf{F}^H \cdot \nabla p_2 \, \mathbf{dy} \end{pmatrix}$$

- *On peut toujours trouver* $\left(\mathbf{E}, \mathbf{H}\right)$ *une solution du problème de départ qui s'écrit*

$$\left(\mathbf{E}_C, \mathbf{H}_C\right) \; + \; \left(\mathbf{E}_{\mathscr{N}}, \mathbf{H}_{\mathscr{N}}\right)$$

avec $\left(\mathbf{E}_{\mathscr{N}}, \mathbf{H}_{\mathscr{N}}\right)$ *un élément du noyau*

qui vérifie $\left(\mathbf{E}, \mathbf{H}\right) \xrightarrow[y_3 \to +\infty]{} 0$ *à condition que la condition de compatibilité suivante soit satisfaite*

$$\boxed{C_E^{(1)} \; + \; Z^{(1)} \; C_H^{(2)} \; = \; 0 \; = \; C_E^{(2)} \; - \; Z^{(2)} \; C_H^{(1)}}$$

- $\mathbf{F}^E$ *et* $\mathbf{F}^H$ *dépendent des champs lointains ce qui nous permet de déterminer des conditions de bords.*

Modèle effectif proposé

Modèle à l'ordre 1

$$\text{rot rot } \mathbf{e}_0 - k^2 \, \mathbf{e}_0 \; = \; 0 \;\; \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (\varepsilon H, +\infty)$$

$$\vec{e}_3 \times \text{rot } \mathbf{e}_0 + ik\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{e}_{0,T} = 0 \;\; \text{sur } \Sigma_{\varepsilon H}$$

$$\mathbf{e}_0 - \mathbf{E}_{inc} \;\; \text{est sortant}$$

Les particules ne sont pas prises en compte !

Modèle à l'ordre 2

$$\mathbf{V}_E^{\varepsilon} \approx \mathbf{e}_0 + \varepsilon \; \mathbf{e}_1$$

$$\text{rot rot } \mathbf{e}_1 - k^2 \, \mathbf{e}_1 \; = \; 0 \;\; \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (\varepsilon H, +\infty)$$

$$\vec{e}_3 \times \text{rot } \mathbf{e}_1 + ik\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{e}_{1,T} = -k^2 \, \mathbf{A}_0 \, \mathbf{e}_{0,T} - k^2 \, \mathbf{B}_0 \, \mathbf{Z}^{-1} \, (\text{rot } \mathbf{e}_0)_T \; - \mathbf{a}_2 \, ik\mathbf{Z}^{-1} \, \text{rot}_T \, \mathbf{e}_0 \; + \mathbf{b}_2 \boxed{\text{rot}_T(\text{rot } \mathbf{e}_0)} \; - \mathbf{A}_3 \boxed{\nabla_T(\text{rot}_T \, \mathbf{e}_0)}$$

$$+ \frac{1}{k} \, \mathbf{B}_3 \, \mathbf{Z}^{-1} \boxed{\nabla_T(\text{rot}_T \, (\text{rot } \mathbf{e}_0))} + ik\mathbf{Z}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_4 : \nabla_T \mathbf{e}_{0,T} \\ \mathbf{A}_5 : \nabla_T \mathbf{e}_{0,T} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{B}_4 : \boxed{\nabla_T(\text{rot } \mathbf{e}_0)_T} \\ \mathbf{B}_5 : \boxed{\nabla_T(\text{rot } \mathbf{e}_0)_T} \end{bmatrix} \quad \text{sur } \Sigma_{\varepsilon H}$$

$$\mathbf{e}_1 \;\; \text{est sortant}$$

Opérateur différentiel à l'ordre 2

Opérateur différentiel à l'ordre 3

$\mathbf{C}$ *sont des matrices obtenues à partir des* $\widetilde{p}_i$ *et* $\widetilde{q}_i$

$\mathbf{c}$ *sont des vecteurs obtenus à partir des* $\widetilde{p}_i$ *et* $\widetilde{q}_i$

Résultats numériques

Objectif : comparer les modèles effectifs avec une solution de référence obtenue avec un code du CEA/CESTA

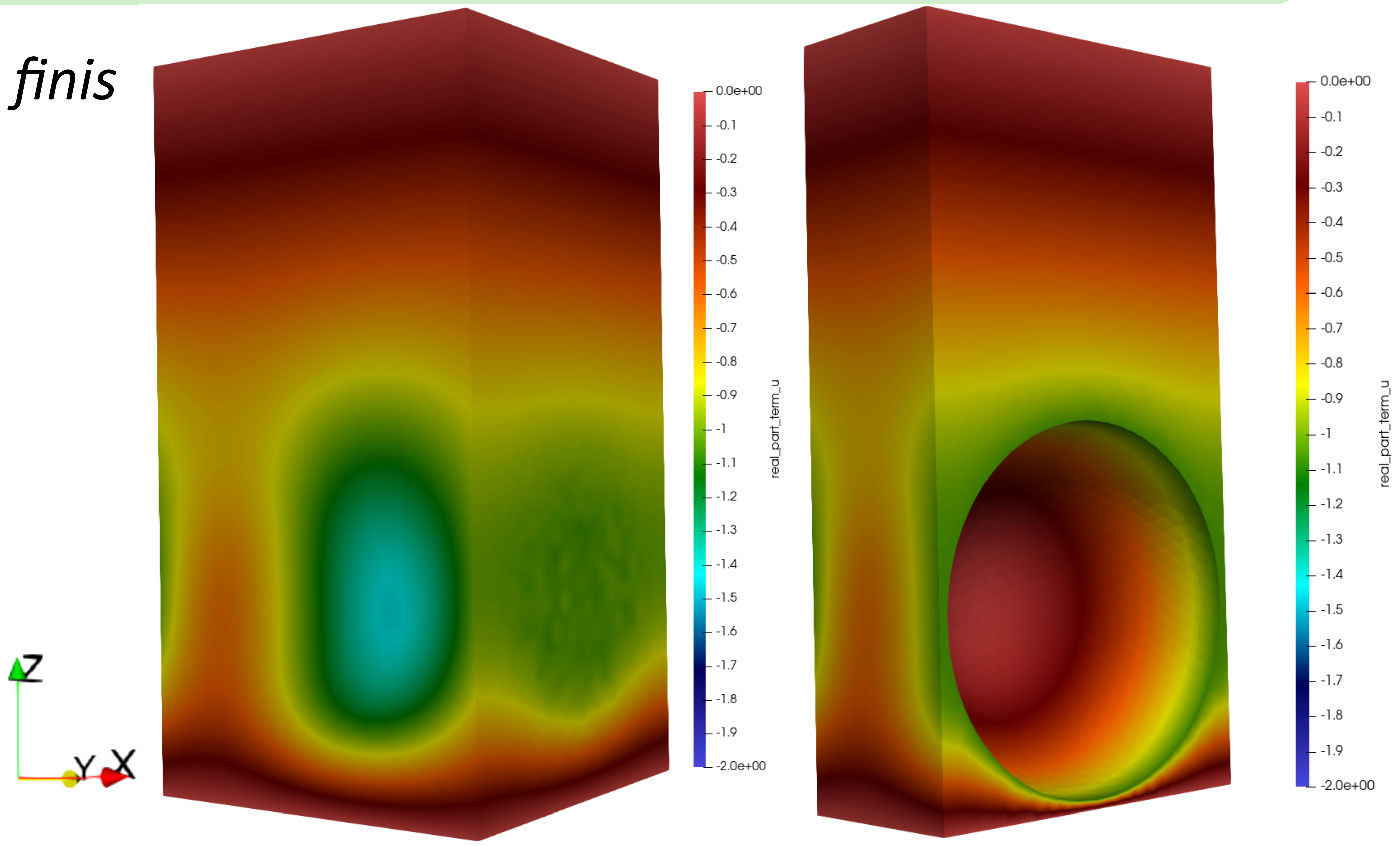
- 1^{ere} *étape : Calculer les fonctions* $\widetilde{p}_i$ *et* $\widetilde{q}_i$ *à l'aide d'une méthode éléments finis*

$$T_1 = T_2 = 2.01$$

$$L = 4.01$$

centre de la particules : $\left(\frac{T_1}{2}, \frac{T_2}{2}, \frac{T_1}{2}\right)$

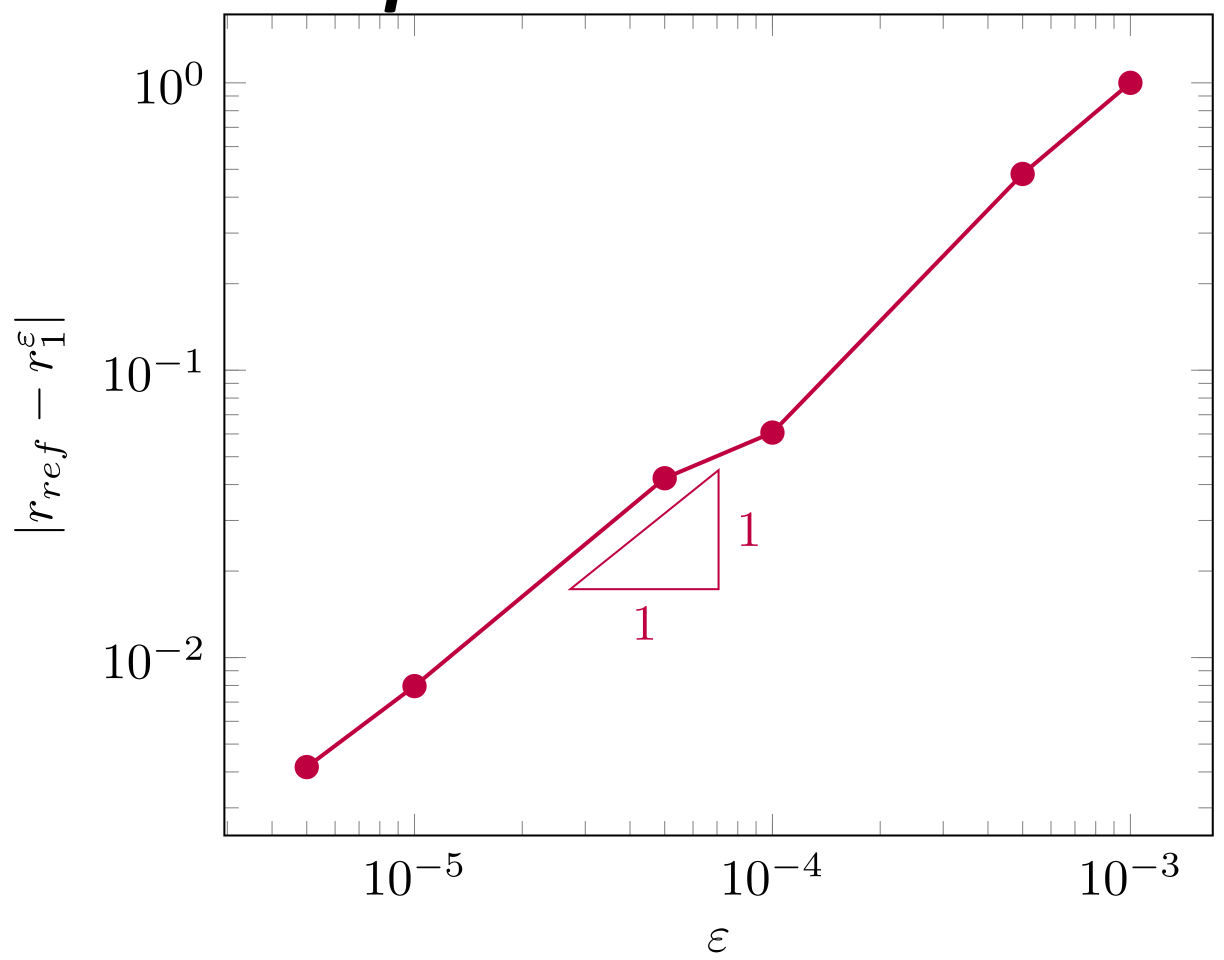
Fonction $\widetilde{p}_1$ *:*



- 2^{eme} *étape : Calculer les coefficients du modèle à l'aide des* $\widetilde{p}_i$ *et* $\widetilde{q}_i$

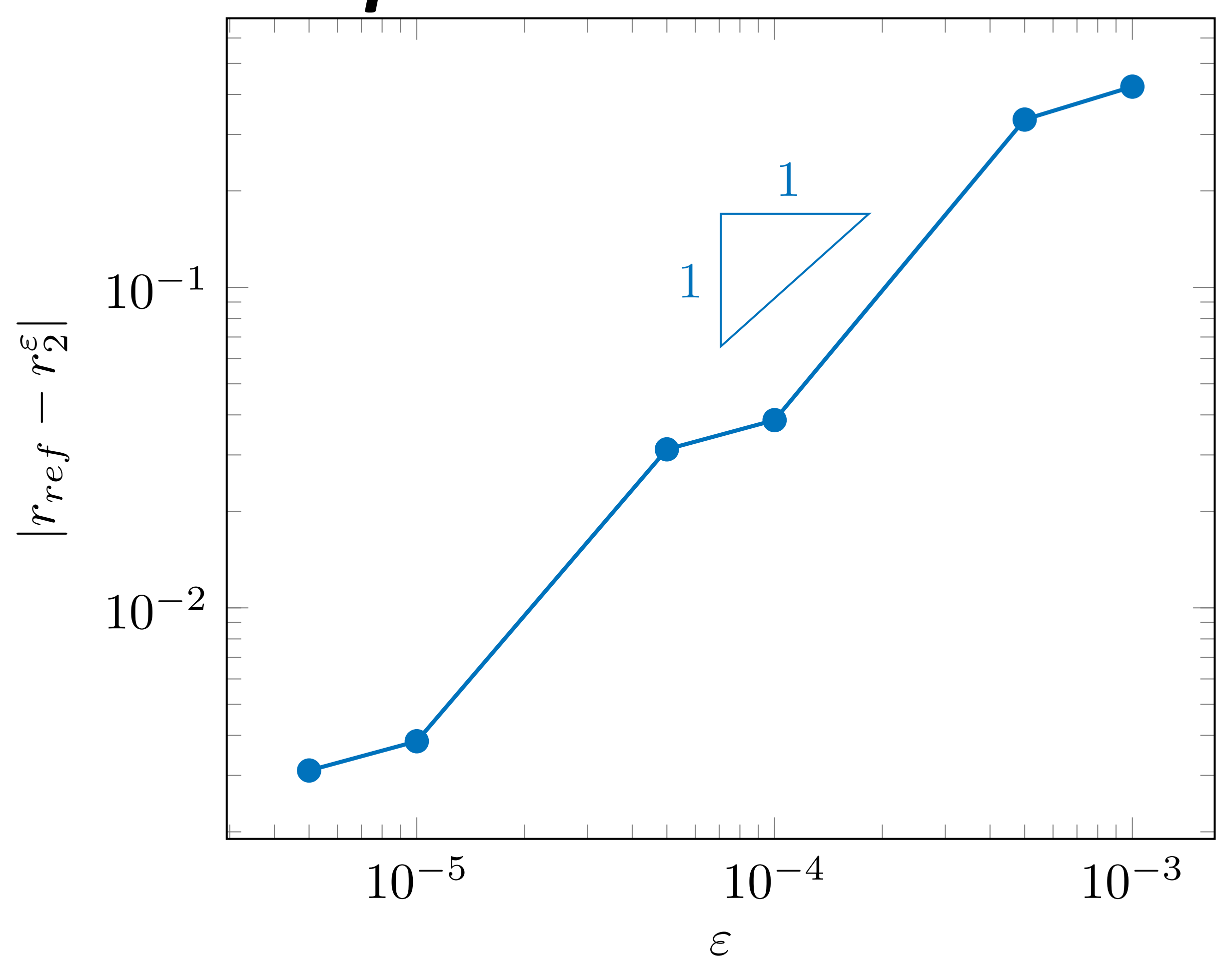
- 3^{eme} *étape : Calculer le vecteur de réflexion et se ramener au coefficient de réflexion du code de référence CEA (Validations)*

Erreur pour le modèle à l'ordre 1



$$T_1 = T_2 = 2.001$$
$$\theta = \pi/4,\ \varphi = 0$$
Polar TE
$$\lambda = 15\text{cm}$$
$$\mathbf{Z} = (0.5 + 0.5i)\mathbf{I}d$$

Erreur pour le modèle à l'ordre 2



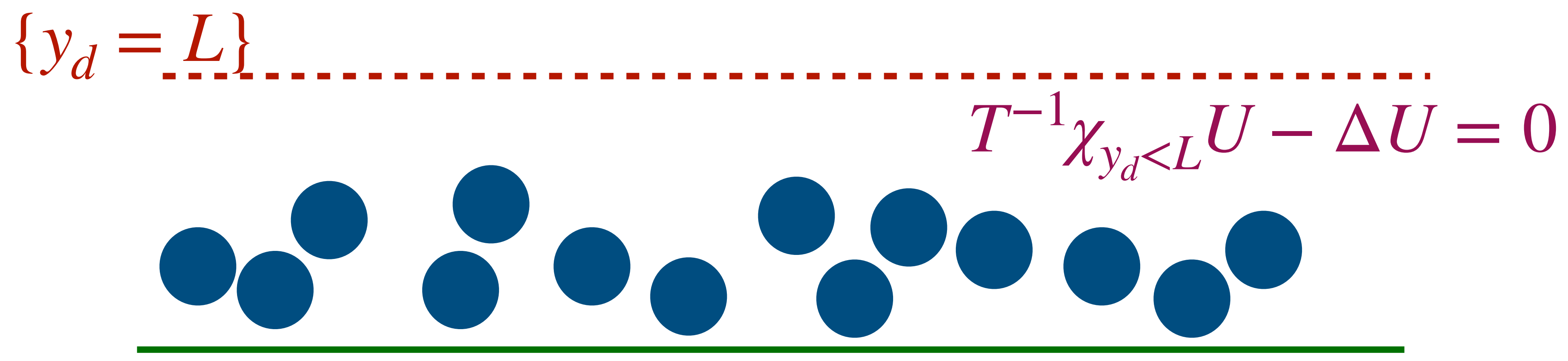
Conclusions et Perspectives

- Les modèles effectifs proposés reproduisent la réponse de la diffraction d'un objet recouvert d'une couche de particules.

Cas Scalaire aléatoire

- Pour déterminer le comportement à l'infini et assurer la stationnarité des champs proches nous avons considéré des problèmes régularisés autour de particules

problèmes régularisés autour des particules



➡ *Est-il possible de raisonner directement ?*

les problèmes non régularisés + hypothèses sur l'aléa ?

- Le développement asymptotique tronqué à l'ordre 2 est proche de la solution en $o(\varepsilon)$.

  ➡ *Pour préciser ces estimations, il faudrait ajouter des hypothèses sur la loi de probabilité afin d'obtenir peut être des estimations estimations en $O\left(\varepsilon^{3/2}\right)$ comme dans les travaux de Gérard-Varet et Duerinckx & Gloria.*

- Etude de l'évolution du coefficient de réflexion : une distribution aléatoire des particules semble avoir moins d'impact qu'une distribution périodique sauf à autoriser des amas.

  ➡ *Est-il possible d'étendre les résultats théoriques à la présence d'amas ?*

Conclusions et Perspectives

Cas Maxwell

- Modèle effectif proposé : étude de ce cas plus délicate et calculs plus techniques que dans le cas scalaire.

➡ *Il faut compléter l'étude par des* ***estimations d'erreurs***.

➡ *Justifier le développement asymptotique dans le cas des équations de Maxwell pour une* ***répartition aléatoire*** *est une question intéressante et encore ouverte.*

➡ ***Prendre en compte la géométrie de l'objet*** *sans l'approximation du plan tangent fait aussi partie des perspectives.*

Merci pour votre attention !